7 （'13　埼玉大）　**【難易度】** … **標準**

$a_1 = 2,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2} + \dfrac{1}{a_n}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ を考える．

（1）　すべての自然数 n に対し，$a_n > \sqrt{2}$ であることを示せ．

（2）　$b_n = \log \dfrac{a_n - \sqrt{2}}{a_n + \sqrt{2}}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とおく．b_{n+1} を b_n で表せ．

（3）　一般項 a_n を求めよ．

（4）　極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

【テーマ】：漸化式と数列の極限

方針

漸化式が解けるときは，解いてから極限値を求めます．(1) は，数学的帰納法で示します．(2) は，与えられた漸化式を用いて b_{n+1} を式変形していきます．

♣ ♠

解答

（1）　$a_n > \sqrt{2}$ …… $(*)$ を数学的帰納法により示す．

【証明】

(i)　$n = 1$ のとき，$a_1 = 2 > \sqrt{2}$ であるから $(*)$ は成立する．

(ii)　$n = k$ のとき，$a_k > \sqrt{2}$ …… ① が成立すると仮定する．

与えられた漸化式に $n = k$ を代入した式を用いると，

$$\begin{aligned} a_{k+1} - \sqrt{2} &= \frac{a_k}{2} + \frac{1}{a_k} - \sqrt{2} \\ &= \frac{{a_k}^2 + 2 - 2\sqrt{2}a_k}{2a_k} \\ &= \frac{(a_k - \sqrt{2})^2}{2a_k} > 0 \end{aligned}$$

よって，$n = k + 1$ のときも $(*)$ は成立する．

ゆえに，(i), (ii) より，すべての自然数 n に対して $(*)$ が成り立つことが示された．　**（証明終）**

（2）　$b_n = \log \dfrac{a_n - \sqrt{2}}{a_n + \sqrt{2}}$ とおくと，

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \log \frac{a_{n+1} - \sqrt{2}}{a_{n+1} + \sqrt{2}} \\ &= \log \frac{\dfrac{(a_n - \sqrt{2})^2}{2a_n}}{\dfrac{(a_n + \sqrt{2})^2}{2a_n}} \quad (\because\ (1), \text{(ii)}) \\ &= \log \left(\frac{a_n - \sqrt{2}}{a_n + \sqrt{2}} \right)^2 \\ &= 2\log \frac{a_n - \sqrt{2}}{a_n + \sqrt{2}} = 2b_n \end{aligned}$$

ゆえに，$\boldsymbol{b_{n+1} = 2b_n}$……**（答）**

(3)　$b_1 = \log\dfrac{a_1-\sqrt{2}}{a_1+\sqrt{2}} = \log\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$ であるから，

$$\begin{aligned} b_n &= 2^{n-1}\log\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} \\ &= \log\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right)^{2^{n-1}} \end{aligned}$$

一方，(2) より，$b_n = \log\dfrac{a_n-\sqrt{2}}{a_n+\sqrt{2}}$ であるから，

$$\log\frac{a_n-\sqrt{2}}{a_n+\sqrt{2}} = \log\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right)^{2^{n-1}} \iff \frac{a_n-\sqrt{2}}{a_n+\sqrt{2}} = \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right)^{2^{n-1}}$$

である．これを a_n について解くと，

$$\boldsymbol{a_n = \frac{\sqrt{2}\left\{(2+\sqrt{2})^{2^{n-1}}+(2-\sqrt{2})^{2^{n-1}}\right\}}{(2+\sqrt{2})^{2^{n-1}}-(2-\sqrt{2})^{2^{n-1}}}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

となる．

(4)　$p = 2+\sqrt{2},\ q = 2-\sqrt{2}$ とおくと，

$$a_n = \frac{\sqrt{2}\left(p^{2^{n-1}}+q^{2^{n-1}}\right)}{p^{2^{n-1}}-q^{2^{n-1}}} = \frac{\sqrt{2}\left\{1+\left(\dfrac{q}{p}\right)^{2^{n-1}}\right\}}{1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^{2^{n-1}}}$$

と変形できる．ここで，$0 < \dfrac{q}{p} < 1$ であるから，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{q}{p}\right)^{2^{n-1}} = 0$$

となるので，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \boldsymbol{\sqrt{2}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

である．

◇　　♡

解説

(1) は，数学的帰納法で証明をするのが一般的ですが，本問は初項が正の実数であり，漸化式からすべての自然数 n に対して $a_n > 0$ であることがわかるので，相加平均・相乗平均の関係を用いても示すことができます．

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} \geqq 2\sqrt{\frac{a_n}{2}\cdot\frac{1}{a_n}} = \sqrt{2}$$

等号は，$\dfrac{a_n}{2} = \dfrac{1}{a_n}$ すなわち $a_n = \sqrt{2}$ のときに成立することになりますが，このとき，$a_{n+1} = \sqrt{2}$ となり，$a_{n+1} = a_n$ すなわち $a_1 = \sqrt{2}$ となるので，矛盾が生じます．したがって，等号は不成立です．ゆえに，$a_n > \sqrt{2}$ が示されます．相加平均・相乗平均の関係を用いるときは，この等号成立条件を忘れないようにしましょう．

(2) は，$b_{n+1} = \log\dfrac{a_{n+1}-\sqrt{2}}{a_{n+1}+\sqrt{2}}$ として，与えられた漸化式を代入して計算します．この計算過程で (1), (ii) で行った式変形をそのまま流用（k を n に変えるだけ）すれば，計算が短縮できます．

(3) は，(2) を用いて a_n を求めればよいですが，指数部分がややこしいので，採点者がきちんと判別できるように書くよう心がけましょう．

(4) は，基本的な極限値の計算ですが，値が複雑なので文字で置き換えをすれば本質が見えてくるので，すっきり解くことができます．