

7 ('13 埼玉大)

【難易度】…標準

$a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で定義される数列 $\{a_n\}$ を考える.

- (1) すべての自然数 n に対し, $a_n > \sqrt{2}$ であることを示せ.
- (2) $b_n = \log \frac{a_n - \sqrt{2}}{a_n + \sqrt{2}}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とおく. b_{n+1} を b_n で表せ.
- (3) 一般項 a_n を求めよ.
- (4) 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ.