23 （'06　北海道大） **【難易度】** … やや難

（1） 整数 m, n に対して，積分 $I_{m,n}=\int_0^{2\pi}\cos mx\cos nx\,dx$ を求めよ.

（2） 自然数 n に対して，積分 $J_n=\int_0^{2\pi}\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\cos kx\right)^2 dx$ を求めよ.

【テーマ】：定積分

方針

(1) は m, n の値が等しいか 0 かで場合分けが必要になります．(2) は (1) の結果を利用して式を簡単にしましょう．

♣ ♠

解答

(1)

(i) $m=\pm n \neq 0$ のとき,

$$\begin{aligned}I_{m,n}&=\int_0^{2\pi}\cos^2 mx\,dx\\&=\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2mx}{2}\,dx\\&=\frac{1}{2}\left[\,x+\frac{1}{2m}\sin 2mx\,\right]_0^{2\pi}\\&=\frac{1}{2}\cdot 2\pi=\pi\end{aligned}$$

(ii) $m\neq\pm n$ のとき,

$$\begin{aligned}I_{m,n}&=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\left\{\cos(m+n)x+\cos(m-n)x\right\}\,dx\\&=\frac{1}{2}\left[\,\frac{1}{m+n}\sin(m+n)x+\frac{1}{m-n}\sin(m-n)x\,\right]_0^{2\pi}\\&=0\end{aligned}$$

(iii) $m=n=0$ のとき,

$$\begin{aligned}I_{m,n}&=\int_0^{2\pi}dx\\&=2\pi\end{aligned}$$

以上より，求める定積分の値は,

$$\boldsymbol{I_{m,n}=\begin{cases}\pi & (m=\pm n\neq 0)\\ 0 & (m\neq\pm n)\\ 2\pi & (m=n=0)\end{cases}}\quad\cdots\cdots\textbf{(答)}$$

(2) (1), (ii) の結果を用いると,

$$\begin{aligned}J_n&=\int_0^{2\pi}\left(\cos x+\sqrt{2}\cos 2x+\sqrt{3}\cos 3x+\cdots\cdots+\sqrt{n}\cos nx\right)^2\,dx\\&=\int_0^{2\pi}\left(\cos^2 x+2\cos^2 2x+3\cos^2 3x+\cdots\cdots+n\cos^2 nx\right)\,dx\end{aligned}$$

と変形できる．ここで, (1), (i) の結果より, $\int_0^{2\pi}\cos^2 mx\,dx=\pi$ であるから,

$$J_n = \pi + 2\pi + 3\pi + \cdots\cdots + n\pi = \boldsymbol{\frac{n(n+1)}{2}\pi}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

である.

◇ ♡

解説

(1) は m, n の値が 0 かどうか，また等しいかどうかなど様々な場合分けが必要なので，注意が必要です.

(2) は，経験がなければ難しいかもしれませんが，(1) がヒントになっていることには気付きたいものです．被積分関数をまともに計算すると大変ですから，(1), (ii) が威力を発揮します．$\cos mx \cos nx$ で $m \neq n$ であれば定積分の値が 0 になるというものなので，$\left(\cos x + \sqrt{2}\cos 2x + \sqrt{3}\cos 3x \cdots\cdots + \sqrt{n}\cos nx\right)^2$ を展開したとき，残ってくるのは 2 乗の項だけであるということに気付きましょう.