

**12**

('12 九州工業大・改)

【難易度】…標準

$O$  を原点とする座標平面上に点  $P_0(1, 1)$ ,  $Q_0(1, 0)$  がある。ある  $p$  ( $0 < p < 1$ ) に対して、点  $P_1(p, p)$ ,  $Q_1(p, 0)$  を定め、さらに、自然数  $n$  について点  $P_{n+1}$ ,  $Q_{n+1}$  を次のように定める。

- ・点  $Q_n$  を通り直線  $Q_0P_1$  と平行な直線と、直線  $OP_0$  の交点を  $P_{n+1}$  とする。
- ・点  $P_{n+1}$  を通り  $y$  軸と平行な直線と、 $x$  軸の交点を  $Q_{n+1}$  とする。

また、 $\triangle Q_{n-1}P_nQ_n$  の面積を  $S_n$  とするとき、以下の問いに答えよ。

- (1)  $S_1$  を  $p$  を用いて表せ。
- (2) 点  $Q_{n-1}$  の  $x$  座標を  $q$  とするとき、点  $Q_n$  の  $x$  座標を  $p, q$  を用いて表せ。
- (3)  $S_n$  を  $p, n$  を用いて表せ。
- (4)  $n$  を定数として、 $p$  を  $0 < p < 1$  の範囲で動かすとき、 $S_n$  を最大にする  $p$  とそのときの  $S_n$  をそれぞれ  $n$  を用いて表せ。
- (5) (4) で求めた  $S_n$  に対して、 $\lim_{n \rightarrow \infty} nS_n$  を求めよ。