6 ('12　神戸大) 【難易度】 … 標準

n を自然数とし，多項式 $P(x)$ を $P(x)=(x+1)(x+2)^n$ と定める．以下の問に答えよ．

(1)　$P(x)$ を $x-1$ で割ったときの余りを求めよ．

(2)　$(x+2)^n$ を x^2 で割ったときの余りを求めよ．

(3)　$P(x)$ を x^2 で割ったときの余りを求めよ．

(4)　$P(x)$ を $x^2(x-1)$ で割ったときの余りを求めよ．

【テーマ】：整式の除法

方針

(1) は，剰余の定理を用います．(2) は，二項定理を用いれば余りが求められます．(3), (4) は前問の結果を用います．

♣ ♠

解答

(1)　剰余の定理より，求める余りは，

$$P(1)=\boldsymbol{2\cdot 3^n}\cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2)　二項定理より，

$$\begin{aligned}(x+2)^n &= {}_n\mathrm{C}_0x^n+{}_n\mathrm{C}_1x^{n-1}\cdot 2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-2}x^2\cdot 2^{n-2}+{}_n\mathrm{C}_{n-1}x\cdot 2^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_n2^n\\ &= x^2\left({}_n\mathrm{C}_0x^{n-2}+{}_n\mathrm{C}_1x^{n-3}\cdot 2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-2}2^{n-2}\right)+n\cdot 2^{n-1}x+2^n\end{aligned}$$

ゆえに，$(x+2)^n$ を x^2 で割った余りは，

$$\boldsymbol{n\cdot 2^{n-1}x+2^n}\cdots\cdots(\text{答})$$

(3)　(2) より，

$$(x+2)^n=x^2Q_1(x)+n\cdot 2^{n-1}x+2^n\ \cdots\cdots ①$$

とおける．両辺に $x+1$ をかけると，

$$(x+1)(x+2)^n=x^2(x+1)Q_1(x)+(n\cdot 2^{n-1}x+2^n)(x+1)$$

$$\begin{aligned}P(x) &= x^2(x+1)Q_1(x)+(n\cdot 2^{n-1}x+2^n)(x+1)\\ &= x^2(x+1)Q_1(x)+n\cdot 2^{n-1}x^2+(n\cdot 2^{n-1}+2^n)x+2^n\\ &= x^2\left\{(x+1)Q_1(x)+n\cdot 2^{n-1}\right\}+(n+2)2^{n-1}x+2^n\ \cdots\cdots ②\end{aligned}$$

よって，$P(x)$ を x^2 で割った余りは，

$$\boldsymbol{(n+2)2^{n-1}x+2^n}\cdots\cdots(\text{答})$$

(4)　② において，$Q_2(x)=(x+1)Q_1(x)+n\cdot 2^{n-1}$ とおき，$Q_2(x)$ を $x-1$ で割ったときの余りは，剰余の定理より，

$$Q_2(1) = 2Q_1(1) + n \cdot 2^{n-1}$$

である．一方，① より，$x = 1$ を代入すると，

$$3^n = Q_1(1) + n \cdot 2^{n-1} + 2^n \iff Q_1(1) = 3^n - (n+2)2^{n-1}$$

であるから，

$$\begin{aligned} Q_2(1) &= 2\left\{3^n - (n+2)2^{n-1}\right\} + n \cdot 2^{n-1} \\ &= 2 \cdot 3^n - (n+4)2^{n-1} \end{aligned}$$

したがって，

$$Q_2(x) = (x-1)Q_3(x) + 2 \cdot 3^n - (n+4)2^{n-1}$$

と表せるので，② から，

$$\begin{aligned} P(x) &= x^2\left\{(x-1)Q_3(x) + 2 \cdot 3^n - (n+4)2^{n-1}\right\} + (n+2)2^{n-1}x + 2^n \\ &= x^2(x-1)Q_3(x) + \left\{2 \cdot 3^n - (n+4)2^{n-1}\right\}x^2 + (n+2)2^{n-1}x + 2^n \end{aligned}$$

ゆえに，$P(x)$ を $x^2(x-1)$ で割ったときの余りは，

$$\boldsymbol{\left\{2 \cdot 3^n - (n+4)2^{n-1}\right\}x^2 + (n+2)2^{n-1}x + 2^n} \cdots\cdots(\textbf{答})$$

◇ ♡

解説

整式 $P(x)$ を 1 次式 $x-\alpha$ で割ったときの余りは，剰余の定理が使えます．2 次式以上で割るときは，商と余りを設定して式を作り，x に適当な値を代入して余りを決定します．

(2) では，$(x+2)^n$ を x^2 で割った余りを求めるので二項定理を用いましたが，次のように微分を利用しても求めることができます．

別解

$(x+2)^n$ を x^2 で割ったときの商を $Q(x)$ とし，余りを $ax+b$ とすると，

$$(x+2)^n = x^2Q(x) + ax + b \cdots\cdots Ⓐ$$

となるので，$x = 0$ を代入して，$2^n = b$ を得る．また，Ⓐ の両辺を x で微分すると，

$$n(x+2)^{n-1} = 2xQ(x) + x^2Q'(x) + a$$

であるから，$x = 0$ を代入すると，$n \cdot 2^{n-1} = a$ を得る．

ゆえに，求める余りは，$\boldsymbol{n \cdot 2^{n-1}x + 2^n}$……(**答**)

(割る式) $= 0$ が重解をもつタイプでは，微分が利用できます．理系の人は，数学 Ⅲ で積の微分法を学習するので大丈夫だと思いますが，文系の人や理系でもまだ未学習の人は，次の積の微分の公式を知っておくと便利です．特に，文系の人は数学 Ⅲ だから覚えなくていいだろうという意識をもつのではなく，本問のような問題が出たときに使える公式なので，必ず知っておきましょう．

【積の微分法】

u, v, w は x の関数であるとする．このとき，次の式が成り立つ．

$$(uv)' = u'v + uv' \ , \quad (uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$$