4 （'81　名古屋大） **【難易度】** … **標準**

n を 3 以上の自然数とし，関数 $f(x)=\left|\dfrac{x(x-n)}{x^2+1}\right|$ の $x \geqq 0$ における最大値を a_n とする．$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$ を求めよ．

【テーマ】：最大値・最小値

方針

絶対値の中の関数を $g(x)$ とおいて，$y=g(x)$ のグラフを考えます．最大値を与える x の値は複雑な式になるので文字で代用しましょう．

♣ ♠

解答

$g(x)=\dfrac{x(x-n)}{x^2+1}$ とおくと，

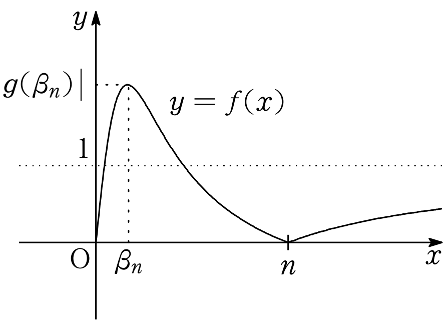
$$g'(x)=\frac{(2x-n)(x^2+1)-x(x-n)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}$$
$$=\frac{nx^2+2x-n}{(x^2+1)^2}$$

である．よって，$g'(x)=0$ のとき，$nx^2+2x-n=0$ であるから，

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+n^2}}{n}$$

である．ここで，$\alpha_n=\dfrac{-1-\sqrt{1+n^2}}{n}$，$\beta=\dfrac{-1+\sqrt{1+n^2}}{n}$ とおくと，$x \geqq 0$ での増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	β_n	$\cdots$	$(+\infty)$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	0	↘		↗	(1)



$$\lim_{x\to\infty}g(x)=1,\ g(\beta_n)=\frac{{\beta_n}^2-n\beta_n}{{\beta_n}^2+1}<0$$

よって，$g(\beta_n)$ と -1 との大小関係を比較する．

$$-1-\frac{{\beta_n}^2-n\beta_n}{{\beta_n}^2+1}=\frac{-2{\beta_n}^2+n\beta_n-1}{{\beta_n}^2+1}$$

$0<\beta_n<1$ より，$y=-2x^2+nx-1$ $(0<x<1)$ とおくと，グラフは x 軸と 2 点で交わり，

$x=1$ のとき，$y=n-3 \geqq 0$

であるから，

$$-1 \geqq \frac{{\beta_n}^2-n\beta_n}{{\beta_n}^2+1}$$

したがって，$y=f(x)$ は $x=\beta_n$ で最大値 $\lvert g(\beta_n)\rvert$ をとる．ゆえに，

$$a_n=\frac{n\beta_n-{\beta_n}^2}{{\beta_n}^2+1}=\frac{n\cdot\dfrac{-1+\sqrt{1+n^2}}{n}-\dfrac{2+n^2-2\sqrt{1+n^2}}{n^2}}{\dfrac{2+n^2-2\sqrt{1+n^2}}{n^2}+1}$$
$$=\frac{-2-2n^2+(n^2+2)\sqrt{1+n^2}}{2+2n^2-2\sqrt{1+n^2}}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{-2-2n^2+(n^2+2)\sqrt{1+n^2}}{2n+2n^3-2n\sqrt{1+n^2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{2}{n^3}-\frac{2}{n}+\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\sqrt{\frac{1}{n^2}+1}}{\frac{2}{n^2}+2-\frac{2}{n}\sqrt{\frac{1}{n^2}+1}}$$

$$=\mathbf{\frac{1}{2}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

◇ ♡

解説

絶対値を含む関数のグラフをかくためには，絶対値をはずす必要がありますが，本問のように，$y=\left|f(x)\right|$ の形をしている関数は，$y=f(x)$ のグラフをかいて x 軸よりも下にある部分を x 軸に関して対称移動すればよいので，場合分けの必要はありません．本問では最大値を求めますが，$x\to\infty$ のとき，$g(x)\to 1$ なので，$\left|g(\beta_n)\right|$ と 1 の大小関係を調べなければいけません．解答では，$g(\beta_n)<0$ なので，$g(\beta_n)$ と -1 の大小関係を調べています．ここが一番面倒な部分かもしれませんが，その議論をせずに勝手に $\left|g(\beta_n)\right|$ が最大値と決め付けると大幅な減点は避けられないでしょう．