25 （'99 防衛医科大） **【難易度】** … やや難

$f(x)=x^2+4n\cos x+1-4n$, $n=1,2,3,\cdots\cdots$ として以下の問いに答えよ.

(1) 各 n に対して

$$f(x)=0\ ,\quad 0<x<\frac{\pi}{2}$$

を満たす実数 x がただ 1 つずつあることを示せ.

(2) (1) の条件を満たす x を x_n とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=0$ であることを示せ.

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n{x_n}^2$ を求めよ.

【テーマ】：関数の極限

方針

$f'(x)=0$, $f''(x)=0$ となる x の値は具体的に表せないので，文字を使います.（2）では，直接 x_n の極限値を求めることが難しいので，$\cos x_n$ の極限値を考えます.

♣ ♠

解答

(1) **【証明】**

$f'(x)=2x-4n\sin x$ ，$f''(x)=2-4n\cos x$ であるから，$f''(x)=0$ のとき，$\cos x=\dfrac{1}{2n}$ である.
これを満たす x を α_n とすると，α_n はただ 1 つ存在する．よって，増減表は次のようになる.

x	0	$\cdots$	α_n	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	0	↘	負	↗	負

$f'(0)=0$, $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\pi-4n<0$

よって，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ で $f'(x)<0$ となるので，この区間で $f(x)$ は単調減少である.

$$\begin{aligned}f(0)&=1>0\\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)&=\frac{\pi^2}{4}+1-4n\\ &\leqq\frac{\pi^2}{4}+1-4=\frac{\pi^2}{4}-3<0\end{aligned}$$

ゆえに，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ で $f(x)=0$ となる x がただ 1 つ存在することが示された. **（証明終）**

(2) **【証明】**

${x_n}^2+4n\cos x_n+1-4n=0$ より，

$$\cos x_n=\frac{4n-1-{x_n}^2}{4n}=1-\frac{{x_n}^2}{4n}-\frac{1}{4n}\ \cdots\cdots ①$$

$0<x_n<\dfrac{\pi}{2}$ より，$0<{x_n}^2<\dfrac{\pi^2}{4}$ であるから，

$$0<\frac{{x_n}^2}{4n}<\frac{\pi^2}{16n}$$

$n\to\infty$ のとき，$\dfrac{\pi^2}{16n}\to 0$ であるから，はさみうちの原理より，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{{x_n}^2}{4n}=0$$

である．① より，

$$\lim_{n\to\infty}\cos x_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{{x_n}^2}{4n}-\frac{1}{4n}\right)=1$$

である．ゆえに，

$$\lim_{n\to\infty}x_n=0$$

となり，示された． **(証明終)**

(3)　${x_n}^2+4n\cos x_n+1-4n=0$ より，

$$4n(1-\cos x_n)={x_n}^2+1$$

$$\frac{4n\sin^2 x_n}{1+\cos x_n}={x_n}^2+1$$

$$\frac{\sin^2 x_n}{1+\cos x_n}=\frac{{x_n}^2+1}{4n}$$

$$\frac{\sin^2 x_n}{{x_n}^2}\cdot\frac{1}{1+\cos x_n}=\frac{{x_n}^2+1}{4n{x_n}^2}$$

$$n{x_n}^2=\frac{{x_n}^2+1}{4}\left(\frac{x_n}{\sin x_n}\right)^2(1+\cos x_n)$$

(2) より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=0$ であるから，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}n{x_n}^2&=\frac{{x_n}^2+1}{4}\left(\frac{x_n}{\sin x_n}\right)^2(1+\cos x_n)\\&=\frac{1}{4}\cdot 1^2\cdot 2\\&=\boldsymbol{\frac{1}{2}}\cdots\cdots(\textbf{答})\end{aligned}$$

である．

◇ ♡

解説

(1) は，$f'(x)$，$f''(x)$ から $f(x)$，$f'(x)$ の増減を調べますが，$f'(x)=0$ となる x の値がそれぞれ具体的に求めることができません．しかし，本問では存在することが重要なのであって，値そのものは必要ないので，文字で代用するだけで十分です．

(2) は，x_n の極限値を求めますが，直接求めることは難しいので，三角関数の極限を利用します．このような，三角関数などを用いて間接的に極限値を求める問題は式変形が難しいので多くの経験が必要になります．

(3) は，式変形が難しい問題です．(2) の結果と与えられた条件から $f(x_n)=0$ であることを用いて式変形を考えます．