11 （′89　東京工業大） **【難易度】** … 標準

次の極限値を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi} x^2|\sin nx|\,dx$$

【テーマ】：定積分と極限

方針

まずは，$|\sin nx|$ の角度に着目し，$nx=t$ と置換します．絶対値をどのようにはずすかがポイントです．

♣ ♠

解答

$nx=t$ とおくと，$dx=\dfrac{1}{n}dt$ であるから，

x	$0 \to \pi$
t	$0 \to n\pi$

$$\int_0^{\pi} x^2|\sin nx|\,dx=\int_0^{n\pi}\frac{t^2}{n^2}|\sin t|\cdot\frac{1}{n}dt$$
$$=\frac{1}{n^3}\int_0^{n\pi}t^2|\sin t|\,dt$$
$$=\frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}t^2|\sin t|\,dt \cdots\cdots ①$$

$t-k\pi=u$ とおくと，$dt=du$

t	$k\pi \to (k+1)\pi$
u	$0 \to \pi$

よって，① は次のように式変形できる．

$$①=\frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi}(u+k\pi)^2|\sin(u+k\pi)|\,du$$
$$=\frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi}(u+k\pi)^2|\cos k\pi\sin u|\,du$$
$$=\frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi}(u+k\pi)^2\sin u\,du \cdots\cdots ②$$

ここで，

$$\int_0^{\pi}(u+k\pi)^2\sin u\,du=\Big[-(u+k\pi)^2\cos u\Big]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}2(u+k\pi)\cos u\,du$$
$$=(\pi+k\pi)^2+k^2\pi^2+2\left\{\Big[(u+k\pi)\sin u\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin u\,du\right\}$$
$$=(k+1)^2\pi^2+k^2\pi^2-2\Big[-\cos u\Big]_0^{\pi}$$
$$=(k+1)^2\pi^2+k^2\pi^2-4$$

よって，② は次のように式変形できる．

$$②=\frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}\{(k+1)^2\pi^2+k^2\pi^2-4\}$$

したがって，

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}x^2|\sin nx|\,dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}\{(k+1)^2\pi^2+k^2\pi^2-4\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\pi^2+\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^2\pi^2-\frac{4}{n^2}\right\}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\int_0^1 \pi^2 x^2\,dx \\
&= 2\pi^2\left[\ \frac{1}{3}x^3\ \right]_0^1 \\
&= \boldsymbol{\frac{2}{3}\pi^2}\cdots\cdots(\textbf{答})
\end{aligned}
$$

◇ ♡

$y=\sin nx$ は周期が $\dfrac{2\pi}{n}$ の関数です．積分区間が $0 \leqq x \leqq \pi$ なので，まずは角度を $nx=t$ と置きなおし，$y=\sin t$ で積分区間を $0 \leqq t \leqq n\pi$ とします．これは，x 軸のスケールを変えていることを意味します．すなわち，横に伸ばして周期が 2π になるようにしただけです．これで積分区間を n 個の区間に分けて和の形で表せば，絶対値がはずせるようになるのです．あとは，積分を計算し，区分求積法によって極限値を計算することができます．式変形に慣れていないと難しく感じる問題でしょう．