10 ('78　東京工業大) **【難易度】** … 標準

a, b, c は $1 < a < b < c$ を満たす整数とし，$(ab-1)(bc-1)(ca-1)$ は abc で割り切れるとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　$ab+bc+ca-1$ は abc で割り切れることを示せ．

(2)　a, b, c をすべて求めよ．

【テーマ】：整数問題

方針

(1) は，与えられた条件式を変形することから示せます．(2) は，絞り込みの方法によって a, b, c の値を確定していきましょう．

解答

(1)　**【証明】**

題意より，$(ab-1)(bc-1)(ca-1) = kabc$ (k は整数) と置くことができるので，これを変形すると，

$$a^2b^2c^2 + (ab+bc+ca) - ab^2c - abc^2 - a^2bc - 1 = kabc$$

$$a^2b^2c^2 + (ab+bc+ca) - abc(a+b+c) - 1 = kabc$$

$$\begin{aligned} ab+bc+ca-1 &= kabc - a^2b^2c^2 + abc(a+b+c) \\ &= abc(k - abc + a + b + c) \end{aligned}$$

$k - abc + a + b + c$ は整数であるから，$ab+bc+ca-1$ は abc の倍数となる．したがって，abc で割り切れることが示された．　**(証明終)**

(2)　$1 < a < b < c$ であることと，(1) の結果から，

$$ab+bc+ca-1 = pabc \quad (p \text{ は正の整数})$$

と置くことができる．$abc \neq 0$ であることから，

$$p = \frac{ab+bc+ca-1}{abc} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{abc}$$

である．p は正の整数であるから，

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > 1 \cdots\cdots ①$$

が成り立つ．ここで，$a \geqq 3$ とすると，

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

となり，① に矛盾する．したがって，$a = 2$ である．このとき，① は，

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > 1 \iff \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > \frac{1}{2} \cdots\cdots ②$$

となる．同様に，$b \geqq 4$ とすると，

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

となり，② に矛盾する．したがって，$b = 3$ である．このとき，② は，

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{c}>\frac{1}{2} \iff \frac{1}{c}>\frac{1}{6}$$
$$\therefore \quad c<6$$

となる．したがって，c のとり得る値は，$c=4,5$ である．

(i) $c=4$ のとき，

$$(ab-1)(bc-1)(ca-1)=5\cdot 11\cdot 7$$

となり，$abc=2\cdot 3\cdot 4$ で割り切れないので不適.

(ii) $c=5$ のとき，

$$(ab-1)(bc-1)(ca-1)=5\cdot 14\cdot 9$$

となり，$abc=2\cdot 3\cdot 5$ で割り切れるので，題意を満たす.

以上より，求める a, b, c の値は，$\boldsymbol{a=2, b=3, c=5}$……(**答**)

◇ ♡

解説

(1) は，$(ab-1)(bc-1)(ca-1)=kabc$ (k は整数）と置くことができるかどうかがポイントで，これを展開し式変形すれば，おのずと示せます．ただし,『$k-abc+a+b+c$ は整数であるから』という一言を忘れると減点されるので，注意が必要です.

(2) は，絞り込みを用いて a, b, c の値を特定していきますが，解答中にある p が正の整数であることがポイントとなります．これを用いて

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>1$$

という不等式が作れれば，具体的に絞り込みが行えます.