

9 (’78 徳島大)

【難易度】…標準

中心 O 、半径 a 、中心角 θ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) の扇形を OAB とする。 A から半径 OB に下ろした垂線を AB_1 、 B_1 を通り弦 AB に平行な直線と半径 OA との交点を A_1 、 A_1 から OB に下ろした垂線を A_1B_2 、 B_2 を通り AB に平行な直線と OA との交点を A_2 とする。このように限りなく繰り返して、 OA 、 OB 上にそれぞれ点列 $\{A_n\}$ 、 $\{B_n\}$ を作る。 $\triangle ABB_1$ 、 $\triangle A_1B_1B_2$ 、 \dots 、 $\triangle A_nB_nB_{n+1}$ 、 \dots の面積をそれぞれ S_1 、 S_2 、 \dots 、 S_{n+1} 、 \dots とするとき、次の問いに答えよ。

(1) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ の和 S を求めよ。

(2) 扇形 OAB の面積を T とするとき、極限值 $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{S}{T}$ を求めよ。

【テーマ】：無限等比級数の和

方針

第 n 番目の図形を考えます。中心角が θ なので、三角比を用いて長さを求めましょう。

解答

(1) $OA_n = a_n$ とおく。ただし、 $OA_0 = OA = a$ とする。

$OB_{n+1} = a_n \cos \theta$ であるから、 $OA_{n+1} = a_n \cos \theta$ である。
したがって、

$$a_{n+1} = (\cos \theta) a_n$$

が成り立ち、 $a_0 = a$ であるから、 $a_n = a \cos^n \theta$ である。

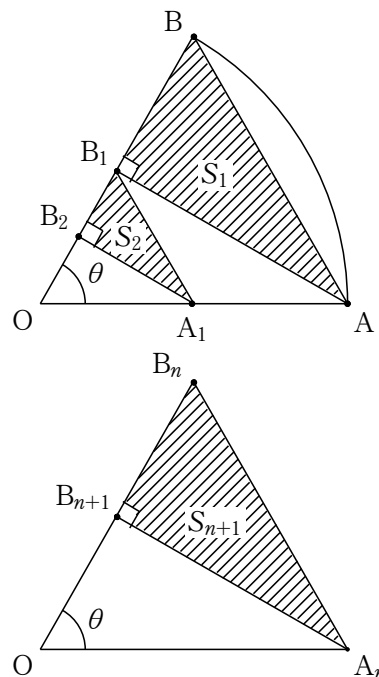
$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} \cdot B_{n-1}B_n \cdot A_{n-1}B_n \\ &= \frac{1}{2} (OB_{n-1} - OB_n) \cdot OA_{n-1} \sin \theta \\ &= \frac{1}{2} (a \cos^{n-1} \theta - a \cos^n \theta) \cdot a \cos^{n-1} \theta \cdot \sin \theta \\ &= \frac{a^2}{2} \sin \theta (1 - \cos \theta) \cos^{2(n-1)} \theta \end{aligned}$$

ゆえに、 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ は、初項 $S_1 = \frac{a^2}{2} \sin \theta (1 - \cos \theta)$ 、公比 $\cos^2 \theta < 1$ の無限等比級数の和となるので、収束してその和 S は、

$$\begin{aligned} S &= \frac{\frac{a^2}{2} \sin \theta (1 - \cos \theta)}{1 - \cos^2 \theta} \\ &= \frac{a^2 \sin \theta}{2(1 + \cos \theta)} \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

(2) $T = \frac{1}{2} a^2 \theta$ であるから、

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{S}{T} &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{2}{a^2 \theta} \cdot \frac{a^2 \sin \theta}{2(1 + \cos \theta)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} \cdot \frac{1}{1 + \cos \theta} \\ &= \frac{1}{2} \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$



【解説】

ある規則にしたがって図形を作っていく問題は、等比数列が表れることが多くあります。その際に、辺の長さや面積を求めるため漸化式を立式します。これは、最初の数個の図形で勝手に等比数列であることを決めると減点の対象となるためです。漸化式を作れば等比数列であることもわかるし、一般項を求めることができます。こうして辺の長さや面積を計算します。漸化式を立式するときは、 n 番目と $n+1$ 番目の図形を考えて、それらの関係を式で表します。本問は、 $OA_n = a_n$ として、数列 $\{a_n\}$ に関する漸化式を求めました。これは、辺の長さが分かれば面積が求められるためにこのように設定をしています。なお、(1) の解答は方針によっては、 $\frac{a^2}{2} \tan \frac{\theta}{2}$ となりますが、これも正解です。解答にある $\frac{a^2 \sin \theta}{2(1 + \cos \theta)}$ を 2 倍角や半角の公式を用いて式変形すると同値であることが分かります。