

1 ('12 広島大)

【難易度】…標準

 a を実数とし, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ とおく. 数列 $\{x_n\}$ を

$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = f(x_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める. 次の問いに答えよ.

- (1) すべての自然数 n について $x_n = a$ となるとき, a を求めよ.
 (2) $a < 1$ のとき, $x_n < 1$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) が成り立つことを証明せよ.
 (3) $0 < a < 1$ のとき, $x_n < x_{n+1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) が成り立つことを証明せよ.

【テーマ】: 数学的帰納法

方針

(1) は, 漸化式に従って計算するだけです. (2), (3) は数学的帰納法を用いて証明します.

解答

- (1) 与えられた漸化式より, $x_{n+1} = x_n^3 - 3x_n^2 + 3x_n$ であり, すべての自然数 n に対して, $x_n = a$ となるとき,

$$\begin{aligned} a &= a^3 - 3a^2 + 3a \iff a^3 - 3a^2 + 2a = 0 \\ &\iff a(a-1)(a-2) = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore a = 0, 1, 2 \dots \text{(答)}$$

- (2) 【証明】

 $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2 \geq 0$ であるから, $f(x)$ は単調増加である. …… (*)

- (i)
- $n = 1$
- のとき,

 $x_1 = a$ であるから, $a < 1$ のとき, $x_1 < 1$ となり, 成り立つ.

- (ii)
- $n = k$
- のとき,

 $x_k < 1$ が成り立つと仮定すると, (*) より,

$$x_{k+1} = f(x_k) < f(1) = 1$$

であるから, $n = k + 1$ のときも成り立つ.ゆえに, (i), (ii) より, すべての自然数 n に対して $x_n < 1$ が成り立つことが示された.

【証明終】

- (3) 【証明】

(2) より, $f(x)$ は単調増加であるから, $x > 0$ であるならば,

$$f(x) > f(0) = 0$$

が成り立つ. …… (**)

 $0 < a < 1$ のとき, $x_n > 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を示す.

(i) $n = 1$ のとき,

$x_1 = a > 0$ であるから, 成り立つ.

(ii) $n = k$ のとき,

$x_k > 0$ が成り立つと仮定すると, (**) より,

$$x_{k+1} = f(x_k) > 0$$

となり, $n = k + 1$ のときも成り立つ.

ゆえに, (i), (ii) より, すべての自然数 n に対して $x_n > 0$ が成り立つことが示された.

よって, (2) とあわせると, $0 < x_n < 1$ が成り立つことが示された.

ここで, $0 < x < 1$ のとき,

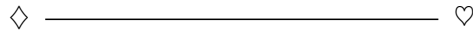
$$\begin{aligned} f(x) - x &= x^3 - 3x^2 + 3x - x \\ &= x(x-1)(x-2) > 0 \end{aligned}$$

より, $f(x) > x$ が成り立つから,

$$0 < x_n < 1 \text{ より, } x_n < f(x_n) \text{ すなわち } x_n < x_{n+1} \text{ (} n = 1, 2, 3, \dots \text{)}$$

が成り立つことが示された.

【証明終】



解説

関数と数列の融合問題です。(2)以降は, $f(x)$ が単調増加であることが重要なポイントとなります。(3)では, a の条件から, $0 < x_1 < 1$ となるので, すべての自然数 n に対して, $0 < x_n < 1$ であることを示し, これと関数の単調増加性を用いて $x_n < x_{n+1}$ を示します.