16 （'11　筑波大） 【難易度】 … 標準

O を原点とする xy 平面において，直線 $y=1$ の $|x| \geqq 1$ を満たす部分を C とする.

(1)　C 上に点 $\mathrm{A}(t,\,1)$ をとるとき，線分 OA の垂直二等分線の方程式を求めよ.

(2)　点 A が C 全体を動くとき，線分 OA の垂直二等分線が通過する範囲を求め，それを図示せよ.

【テーマ】：直線の通過領域

方針

垂直二等分線の方程式を t に関する 2 次関数とみなして考えます.

解答

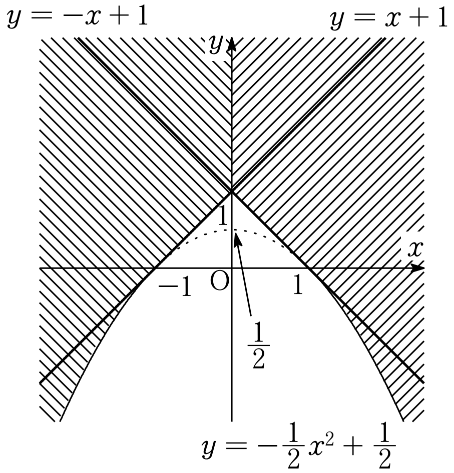
(1)　直線 OA の傾きは $\dfrac{1}{t}$ より，OA の中点 $\left(\dfrac{t}{2},\,\dfrac{1}{2}\right)$ を通り傾き $-t$ の直線が求める垂直二等分線であるから，

$$y=-t\left(x-\frac{t}{2}\right)+\frac{1}{2} \iff \boldsymbol{y=-tx+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}}\cdots\cdots(\text{答})$$

(2)　(1) より，$y=\dfrac{1}{2}t^2-xt+\dfrac{1}{2}$ であるから，これを t の 2 次関数とみなして平方完成すると，

$$y=\frac{1}{2}(t-x)^2-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$$

よって，$y=-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}$ と $y=\dfrac{1}{2}(t-x)^2-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}$ は常に $x=t$ で接していることがわかる.
ゆえに，点 A を $|t| \geqq 1$ で動かすとき，これらの接点は $|x| \geqq 1$ を動くことになるので，垂直二等分線の通過する領域は，右図斜線部分で，境界線を含む.



別解　(2) は，次のように考えて，解くこともできる.

$y=\dfrac{1}{2}t^2-xt+\dfrac{1}{2}$ において，$x=k$（k：定数）として t の 2 次関数と考える．このとき，$y=f(t)$ とすると，

$$f(t)=\frac{1}{2}t^2-kt+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(t-k)^2-\frac{1}{2}k^2+\frac{1}{2}$$

このとき，$|t| \geqq 1$ での y のとり得る値の範囲を求めよう.

（ i ）$|k| \geqq 1$ のとき，$t=k$ で最小値をとり，最大値は存在しないので，y のとり得る値の範囲は，

$$y \geqq f(k)=-\frac{1}{2}k^2+\frac{1}{2}$$

（ii）$|k| \leqq 1$ のとき，$t=-1$ または $t=1$ のいずれかで最小値をとる．$\min\{a,\,b\}$ を $a,\,b$ の小さい方をとる関数とするとき，

$$y \geqq \min\{f(-1),\,f(1)\}=\min\{k+1,\,-k+1\}$$

（ i ），（ii）より，k を x に戻して，これらを満たす領域を図示すると，**解答** と同じ図を得る.

◇ ♡

解説

最初の解答は，直線が常に接する曲線（包絡線）を求めています．そして，x のとり得る値から，その接点が動く範囲を求めます．あとは，直線がその曲線に接しながら動くとき，通過する領域を求めればよいことになります．定規などを用いて動きを確認すると分かりやすいでしょう．別解 は，包絡線を求めるのではなく，x の値を固定して y のとり得る値を求めています．これは，最大値・最小値を求める問題に帰着するため，比較的慣れている人も多いと思いますが，手順が多くなり面倒になることもしばしばあります．しかし，包絡線が見つけにくい問題などでは威力を発揮することもあるので，どちらの解法も知っておくとよいでしょう．ちなみに，最大値関数 $\max\{a, b\}$ や最小値関数 $\min\{a, b\}$ は，入試でも時々出題される記号なので，知っておきましょう．