10 （'11　北海道大） **【難易度】** … やや難

$0 < a < 2\pi$ とする．$0 < x < 2\pi$ に対して

$$F(x) = \int_x^{x+a} \sqrt{1-\cos\theta}\, d\theta$$

と定める．

（1） $F'(x)$ を求めよ．

（2） $F'(x) \leqq 0$ となる x の範囲を求めよ．

（3） $F(x)$ の極大値および極小値を求めよ．

【テーマ】：定積分と極値

方針

（1）は，微分積分学の基本定理を用い，（2）は，和積の公式を利用します．（3）では，（2）の結果を用いて増減表を作成し，極大値と極小値を計算します．

♣ ♠

解答

（1） 与えられた関数の両辺を x で微分して，

$$\boldsymbol{F'(x) = \sqrt{1-\cos(x+a)} - \sqrt{1-\cos x}} \cdots\cdots(\text{答})$$

（2） （1）より，

$$F'(x) \leqq 0 \iff \sqrt{1-\cos(x+a)} \leqq \sqrt{1-\cos x}$$

両辺正であるから 2 乗して，

$$1-\cos(x+a) \leqq 1-\cos x \iff \cos(x+a)-\cos x \geqq 0$$

和積の公式より，

$$-2\sin\frac{2x+a}{2}\sin\frac{a}{2} \geqq 0$$

$$\therefore \quad \sin\left(x+\frac{a}{2}\right)\sin\frac{a}{2} \leqq 0$$

ここで，$0 < \frac{a}{2} < \pi$ より，$\sin\frac{a}{2} > 0$ であるから，

$$\sin\left(x+\frac{a}{2}\right) \leqq 0 \cdots\cdots ①$$

を得る．$\frac{a}{2} < x + \frac{a}{2} < 2\pi + \frac{a}{2}$ であり，$0 < \frac{a}{2} < \pi$, $2\pi < 2\pi + \frac{a}{2} < 3\pi$ であるから，① を満たす x の範囲は，

$$\pi \leqq x + \frac{a}{2} \leqq 2\pi$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{\pi - \frac{a}{2} \leqq x \leqq 2\pi - \frac{a}{2}} \cdots\cdots(\text{答})$$

（3） $F'(x) = 0$ となるのは，（2）より，

$$x = \pi - \frac{a}{2},\quad 2\pi - \frac{a}{2}$$

ゆえに，増減表は次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	$\pi-\frac{a}{2}$	$\cdots$	$2\pi-\frac{a}{2}$	$\cdots$	(2π)
$F'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$F(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

よって，$x=\pi-\frac{a}{2}$ で極大値をとり，$x=2\pi-\frac{a}{2}$ で極小値をとる．

$$F\left(\pi-\frac{a}{2}\right)=\int_{\pi-\frac{a}{2}}^{\pi+\frac{a}{2}}\sqrt{1-\cos\theta}\,d\theta$$

ここで，$\theta=x+\pi$ とおくと，

$$\begin{aligned}F\left(\pi-\frac{a}{2}\right)&=\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\sqrt{1-\cos(x+\pi)}\,dx=2\int_0^{\frac{a}{2}}\sqrt{1+\cos x}\,dx\\&=2\int_0^{\frac{a}{2}}\sqrt{2\cos^2\frac{x}{2}}\,dx=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{a}{2}}\cos\frac{x}{2}\,dx\quad\left(\because\ \cos\frac{x}{2}>0\right)\\&=2\sqrt{2}\left[\,2\sin\frac{x}{2}\,\right]_0^{\frac{a}{2}}=4\sqrt{2}\sin\frac{a}{4}\end{aligned}$$

同様にして，$\theta=x+2\pi$ と置き換えて計算すると，

$$\begin{aligned}F\left(2\pi-\frac{a}{2}\right)&=\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\sqrt{1-\cos(x+2\pi)}\,dx=2\int_0^{\frac{a}{2}}\sqrt{1-\cos x}\,dx\\&=2\int_0^{\frac{a}{2}}\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}\,dx=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{a}{2}}\sin\frac{x}{2}\,dx\quad\left(\because\ \sin\frac{x}{2}>0\right)\\&=2\sqrt{2}\left[\,-2\cos\frac{x}{2}\,\right]_0^{\frac{a}{2}}=4\sqrt{2}\left(1-\cos\frac{a}{4}\right)\end{aligned}$$

ゆえに，求める極値は，

$$\begin{cases}\textbf{極大値}\quad 4\sqrt{2}\sin\dfrac{a}{4} & \left(x=\pi-\dfrac{a}{2}\right)\\ \textbf{極小値}\quad 4\sqrt{2}\left(1-\cos\dfrac{a}{4}\right) & \left(x=2\pi-\dfrac{a}{2}\right)\end{cases}\cdots\cdots\textbf{(答)}$$

◇ ♡

解説

(1) では，次の式を用いて計算しています．

$$\frac{d}{dx}\int_{g(x)}^{f(x)}h(t)\,dt=h(f(x))f'(x)-h(g(x))g'(x)$$

(2) は，和積の公式を用いて積の形に変形することで求めることができます．(3) では，置換積分をしていますが，置換積分をしなくても

$$\sqrt{1-\cos\theta}=\sqrt{2\sin^2\frac{\theta}{2}}=\sqrt{2}\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$$

と変形することで，積分計算をすることもできます．