6 （'99　東京工業大） **【難易度】** … 標準

正の実数 $a,\ b,\ p$ に対して，$A=(a+b)^p$ と $B=2^{p-1}(a^p+b^p)$ の大小関係を調べよ．

【テーマ】：式の大小関係

方針

$A,\ B$ は $a,\ b$ に関して対称な式になっているので，$a \leqq b$ として考えても一般性を失いません．さらに，$x=\dfrac{a}{b}$ とおくことで 1 変数に帰着させます．

♣ ♠

解答

$A,\ B$ はともに $a,\ b$ に関して対称なので，$a \leqq b$ としても一般性を失わない．

$$\begin{aligned} B-A &= 2^{p-1}(a^p+b^p)-(a+b)^p \\ &= b^p\left\{2^{p-1}\left(\left(\frac{a}{b}\right)^p+1\right)-\left(\frac{a}{b}+1\right)^p\right\} \end{aligned}$$

$b^p>0$ より，$\dfrac{a}{b}=x$ として，

$$f(x)=2^{p-1}(x^p+1)-(x+1)^p \qquad (0<x \leqq 1)$$

とおくとき，$f(x)$ の符号を調べればよい．

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2^{p-1}\cdot px^{p-1}-p(x+1)^{p-1} \\ &= p(2x)^{p-1}-p(x+1)^{p-1} \end{aligned}$$

（ i ） $p>1$ のとき，

$$\begin{aligned} f'(x) &= p(2x)^{p-1}-p(x+1)^{p-1} \\ &< p(x+1)^{p-1}-p(x+1)^{p-1}=0 \end{aligned}$$

よって，$f(x)$ は $0<x \leqq 1$ で単調減少で，

$$f(1)=2^{p-1}\cdot 2-2^p=0$$

より，$f(x) \geqq 0$ を得る．等号は，$x=1$ すなわち $a=b$ のとき，成立する．

$$\therefore \quad A \leqq B$$

（ii） $p=1$ のとき，

$$f(x)=(x+1)-(x+1)=0$$

より，$f(x)=0$ を得る．

$$\therefore \quad A=B$$

（iii） $0<p<1$ のとき，

$$\begin{aligned} f'(x) &= p(2x)^{p-1}-p(x+1)^{p-1} \\ &= \frac{p}{(2x)^{1-p}}-\frac{p}{(x+1)^{1-p}} \\ &> \frac{p}{(2x)^{1-p}}-\frac{p}{(2x)^{1-p}}=0 \end{aligned}$$

よって，$f(x)$ は $0<x \leqq 1$ で単調増加で，$f(1)=0$ より，$f(x) \leqq 0$ を得る．等号は，$x=1$ すなわち $a=b$

のとき，成立する．

$$\therefore \quad A \geqq B$$

ゆえに，(i)〜(iii) より，求める大小関係は，

$$\begin{cases} \boldsymbol{0 < p < 1} \textbf{ のとき，} & \boldsymbol{A \geqq B} \quad \textbf{（等号は，}\boldsymbol{a = b}\textbf{ のとき成立）} \\ \boldsymbol{p = 1} \textbf{ のとき，} & \boldsymbol{A = B} \\ \boldsymbol{p > 1} \textbf{ のとき，} & \boldsymbol{A \leqq B} \quad \textbf{（等号は，}\boldsymbol{a = b}\textbf{ のとき成立）} \end{cases} \quad \cdots\cdots\text{(答)}$$

◇ ♡

解説

ポイントは，2 つあります．1 つ目は，a, b の対称性に着目して，a, b の大小関係を決めることです．大小関係はどちらでも構いません．2 つ目は，a, b という 2 つの文字を $x = \dfrac{a}{b}$ とおくことで，1 つの文字にすることです．こうすることで，方針が立てやすくなります．しかも，a, b の関係式を先に決めているので，x のとり得る値も決まります．大切な考え方を含む問題なので，類題が出たときには気付けるようになっておきましょう．そのためにも，復習は欠かせません．

この問題は，p で場合分けをする点にも注意が必要です．$f'(x)$ の符号を調べることでグラフの状況をつかもうと考えるのですが，p が 1 より大きいか小さいかで指数部分の符号が変わってしまいます．指数部分の符号が変わると $(2x)^{p-1}$ と $(x+1)^{p-1}$ の大小関係が変わるので，$0 < p < 1$, $p = 1$, $p > 1$ で場合分けが必要になります．よくわからないぞって人は，例えば，$x = \dfrac{1}{3}$ として考えてみて下さい．このとき，

$$(2x)^{p-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{p-1}, \quad \left(\frac{4}{3}\right)^{p-1}$$

となりますが，例えば，$p = \dfrac{1}{2}$, $p = 2$ のときで考えると，大小関係が逆転することが分かると思います．各自で計算して確かめてください．