

17 ('07 京大)

【難易度】… 難

A を 2 次の正方行列とする . 列ベクトル \vec{x}_0 に対し , 列ベクトル $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots$ を $\vec{x}_{n+1} = A\vec{x}_n$, ($n = 0, 1, 2, \dots$) によって定める . ある零ベクトルではない \vec{x}_0 について , 3 以上の自然数 m で初めて \vec{x}_m が \vec{x}_0 と一致するとき , 行列 A^m は単位行列であることを示せ .

【テーマ】: 1 次変換

方針

いろいろな方針があると思いますが , ここではケーリー・ハミルトンの定理を使って解いていきます .

解答

【証明】

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とし , $a + d = s$, $ad - bc = t$ とおくと , ケーリー・ハミルトンの定理より ,

$$A^2 - sA + tE = O \iff A^2 = sA - tE$$

が成り立つ . よって ,

$$A^3 = sA^2 - tA = s(sA - tE) - tA = (s^2 - t)A - stE$$

となるので , 以後帰納的に $m \geq 3$ のとき , $A^m = pA - qE \dots$ ① と表すことができる . ただし , p, q は実数 . ① より ,

$$A^m \vec{x}_0 = pA\vec{x}_0 - qE\vec{x}_0$$

が成り立ち , $\vec{x}_m = A\vec{x}_{m-1} = \dots = A^m \vec{x}_0$ より ,

$$\vec{x}_m = pA\vec{x}_0 - qE\vec{x}_0$$

である . ここで , $\vec{x}_m = \vec{x}_0$ より ,

$$\vec{x}_0 = pA\vec{x}_0 - qE\vec{x}_0 \iff pA\vec{x}_0 = (1 + q)\vec{x}_0 \dots$$
 ②

となる . $p \neq 0$ のとき ,

$$A\vec{x}_0 = \frac{1+q}{p}\vec{x}_0$$

となるので , $r = \frac{1+q}{p}$ とおくと ,

$$A\vec{x}_0 = r\vec{x}_0 \text{ より , } A^2\vec{x}_0 = r^2\vec{x}_0 \dots$$
 ③

であり , 以後帰納的に変形することで $A^m \vec{x}_0 = r^m \vec{x}_0$ を得る . したがって ,

$$\vec{x}_m = r^m \vec{x}_0$$

となり , $\vec{x}_m = \vec{x}_0$ より ,

$$\vec{x}_0 = r^m \vec{x}_0$$

である . $\vec{x}_0 \neq \vec{0}$ であるから , $r^m = 1$ でありこのとき , $r = \pm 1$ となるので $r^2 = 1$ である . このとき , ③ より , $A^2 \vec{x}_0 = \vec{x}_0$ となるので , $m \geq 3$ で初めて \vec{x}_m と \vec{x}_0 が一致するという条件に反し不適 . よって , $p = 0$ となる . このとき , ② より ,

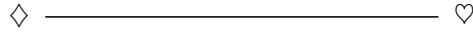
$$(q+1)\vec{x}_0 = \vec{0}$$

となり, $\vec{x}_0 \neq \vec{0}$ であることから, $q = -1$ を得る. よって, ① より,

$$A^m = E$$

となるので, 題意は示された.

(証明終)



解説

証明の概要は, 一般に A^m が A と E だけで表されることを述べておき, そこから A の係数が 0 になり, E の係数が 1 となることを導くというものです. 与えられた条件 $\vec{x}_{n+1} = A\vec{x}_n$ と $\vec{x}_m = \vec{x}_0$ をどのように使うかがポイントとなります.