

12 ('04 新潟大)

【難易度】…標準

 a, b を整数とし, 行列 A, B を

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ a & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & 3 \end{pmatrix}$$

と定める. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) $(A+B)$ は逆行列 $(A+B)^{-1}$ をもつことを示せ.
- (2) $(A+B)^{-1}$ のすべての成分が整数となるとき, $A-B$ は逆行列 $(A-B)^{-1}$ をもつことを示せ.
- (3) $(A+B)^{-1}$ と $(A-B)^{-1}$ のすべての成分が整数になるような a と b の組 (a, b) をすべて求めよ.

【テーマ】: 行列と整数問題

方針

(1) は, 逆行列をもつと仮定して矛盾を導き, (2), (3) はいずれも必要条件から考えます. (3) では, 十分性を調べることを忘れないようにしましょう.

解答

(1) 【証明】

$A+B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ a+b & 7 \end{pmatrix}$ より, $\Delta(A+B) = 14 - 3(a+b)$ である. ここで, $\Delta(A+B) = 0$ のとき, $3(a+b) = 14$ であるが, 3 と 14 は互いに素であるからこれを満たす整数 $a+b$ は存在しない. よって, $\Delta(A+B) \neq 0$ となり, $(A+B)^{-1}$ が存在することが示された. (証明終)

(2) 【証明】

(1) より,

$$(A+B)^{-1} = \frac{1}{14-3(a+b)} \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -(a+b) & 2 \end{pmatrix}$$

となるので, 各成分が整数となるためには,

$$14 - 3(a+b) = \pm 1$$

となることが必要で, これを満たす整数 $a+b$ の値は, $a+b=5$ のみである. このとき $b=5-a$ より,

$$A-B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a-b & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2a-5 & 1 \end{pmatrix}$$

であるから, $\Delta(A-B) = 2 - (2a-5) = -2a+7$ であり, a が整数であることから $\Delta(A-B) \neq 0$ となる. ゆえに, $(A-B)^{-1}$ が存在することが示された. (証明終)

(3) (2) より, $(A+B)^{-1}$ のすべての成分が整数になるためには, $a+b=5$ であることが必要である. さらに,

$$\Delta(A-B) = 2 - (a-b) \text{ より, } (A-B)^{-1} = \frac{1}{2-(a-b)} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -a+b & 2 \end{pmatrix}$$

であることから, すべての成分が整数となるためには,

$$2 - (a - b) = \pm 1 \iff a - b = 1, 3$$

であることが必要であり、逆にこのとき $(A - B)^{-1}$ のすべての成分は整数となる。よって、

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ a - b = 1 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} a + b = 5 \\ a - b = 3 \end{cases}$$

を満たす整数 a, b の組を求めると、 $(a, b) = (4, 1), (3, 2)$ であり、 a, b がこれらの値をとるとき、 $(A + B)^{-1}, (A - B)^{-1}$ の成分はすべて整数となるので、題意を満たす。以上より求める a, b の組は、

$$(a, b) = (4, 1), (3, 2) \cdots \cdots (\text{答})$$

である。



解説

(1) は、逆行列をもつと仮定すると矛盾が導かれますが、 $a + b$ が整数より $14 - 3(a + b) \neq 0$ であるとしても問題ないでしょう。

(2) は、 $(A + B)^{-1}$ のすべての成分が整数になるために必要な最低限の条件を求めておき、その条件のもとで $\Delta(A - B) \neq 0$ となることを示せばよいのです。

(3) も、(2) と同様に必要最低限の条件を求めてから a, b の値を求めてその値が題意を満たしていることを確認してから答えとしましょう。十分性を確認せずに答えとすれば減点は避けられません。