1 ('83　北海道大) **【難易度】** … 標準

(1)　t が $t>1$ の範囲を動くとき，関数 $f(t)=\log_2 t+\log_t 4$ の最小値を求めよ．

(2)　$t>1$ なるすべての t に対して，不等式

$$k\log_2 t<(\log_2 t)^2-\log_2 t+2$$

が成り立つような k の範囲を求めよ．

【テーマ】：指数関数と対数不等式

方針

指数関数の最小値を求める問題です．まずは,底をそろえましょう．t の範囲が与えられているので，$\log_2 t>0$ であることと, 逆数の形が出てくることから相加平均・相乗平均の関係を使うことができます．(2) では，$x=\log_2 t$ とおいて，x の 2 次関数に帰着させましょう．

♣　♠

解答

(1)　$f(t)=\log_2 t+\dfrac{\log_2 4}{\log_2 t}=\log_2 t+\dfrac{2}{\log_2 t}$ であり，$t>1$ より $\log_2 t>0$ となるので，相加平均・相乗平均の関係より，

$$\log_2 t+\frac{2}{\log_2 t}\geqq 2\sqrt{\log_2 t\cdot\frac{2}{\log_2 t}}=2\sqrt{2}$$

等号は，$\log_2 t=\dfrac{2}{\log_2 t}$ すなわち

$(\log_2 t)^2=2$ より $\log_2 t=\sqrt{2}$ （$\because$ $\log_2 t>0$）

したがって，$t=2^{\sqrt{2}}$ のとき成立する．ゆえに,

$t=2^{\sqrt{2}}$ のとき，最小値 $2\sqrt{2}$……(答)

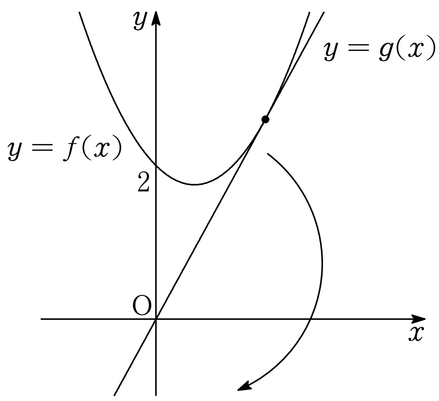
(2)　$t>1$ より $x=\log_2 t$ とおくと，$x>0$ である．このとき,

$$kx<x^2-x+2$$

であり，$f(x)=x^2-x+2$, $g(x)=kx$ とおくと,

$x>0$ で常に $g(x)<f(x)$

となるように実数 k のとり得る値の範囲を求めればよい．



右図のように $y=f(x)$ と $y=g(x)$ が第 1 象限で接するときの k の値は,

$$x^2-x+2=kx\iff x^2-(k+1)x+2=0$$

の判別式を D とすると $k>0$ かつ $D=0$ のときであるから,

$$D=(k+1)^2-4\cdot 2=0\quad\iff\quad (k+1)^2=8$$

$k>0$ より，$k=-1+2\sqrt{2}$

$x>0$ で常に $g(x)<f(x)$ となるためには，直線 $y=g(x)$ の傾きが $-1+2\sqrt{2}$ より小さければよいので,

求める k の範囲は,

$$\boldsymbol{k < -1 + 2\sqrt{2}}\text{……(答)}$$

―――――― ♢ ―――――― ♡ ――――――

[解説]

ポイントは，置き換えにあります．置き換えしたら新しい文字の範囲に十分気を付けなければいけません．
$x = \log_2 t$ で $t > 1$ なので，対数関数を考えれば x のとり得る値はすぐに求められますし，$t > 1$ の両辺に底が 2 の対数をとることで，

$$\log_2 t > \log_2 1 \iff x > 0$$

となり，x の範囲を求めることもできます．ただし対数の不等式においては，底が 1 より大きいか小さいかに気を付けないといけないので注意が必要です．

問題としては，標準的なので受験生は完答を目指しましょう．