38 （'96　京都大） 【難易度】 … 標準

（1） $\cos 5\theta = f(\cos\theta)$ を満たす多項式 $f(x)$ を求めよ．

（2） $\cos\frac{\pi}{10}\cos\frac{3\pi}{10}\cos\frac{7\pi}{10}\cos\frac{9\pi}{10} = \frac{5}{16}$ を示せ．

【テーマ】：チェビシェフ多項式

方針

(1) は，加法定理・2 倍角の公式・3 倍角の公式などを駆使すれば求められます．(2) は，(1) で求めた多項式を利用しますが，θ をどのように決めるかがポイントです．

♣ ♠

解答

（1） $\cos\theta = x$ とおく．このとき，

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos 5\theta = \cos(3\theta + 2\theta) \\ &= \cos 3\theta \cos 2\theta - \sin 3\theta \sin 2\theta \\ &= (4\cos^3\theta - 3\cos\theta)(2\cos^2\theta - 1) - (3\sin\theta - 4\sin^3\theta)\cdot 2\sin\theta\cos\theta \\ &= (4x^3 - 3x)(2x^2 - 1) - (6\sin^2\theta\cos\theta - 8\sin^4\theta\cos\theta) \\ &= (4x^3 - 3x)(2x^2 - 1) - (6(1 - x^2)x - 8(1 - x^2)^2 x) \\ &= 8x^5 - 10x^3 + 3x - (-8x^5 + 10x^3 - 2x) \\ &= \boldsymbol{16x^5 - 20x^3 + 5x} \cdots\cdots\textbf{（答）} \end{aligned}$$

（2） **【証明】**

$\theta = \frac{\pi}{10}$，$\frac{3\pi}{10}$，$\frac{7\pi}{10}$，$\frac{9\pi}{10}$ のそれぞれに対して $\cos 5\theta = 0$ であるから，(1) より，$f(\cos\theta) = 0$ である．すなわち，これら 4 つの θ の値は，方程式 $f(\cos\theta) = 0$ の解となる．また，この 4 つの θ の値に対して $\cos\theta \neq 0$ であり，どの 2 つも等しくはない．一方 (1) で得た多項式から，

$$f(x) = x(16x^4 - 20x^2 + 5)$$

と因数分解されるので，先ほどの 4 つの θ に対して $\cos\theta$ の値をそれぞれ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ とおくと，これらは方程式

$16x^4 - 20x^2 + 5 = 0$ の異なる 4 つの実数解である．よって，

$$16x^4 - 20x^2 + 5 = 16(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)(x - \delta)$$

と因数分解されるので，定数項に着目すると，$\alpha\beta\gamma\delta = \frac{5}{16}$ であるから，

$$\cos\frac{\pi}{10}\cos\frac{3\pi}{10}\cos\frac{7\pi}{10}\cos\frac{9\pi}{10} = \frac{5}{16}$$

が示された． **（証明終）**

♢ ♡

解説

一般に $\cos n\theta$ は，$\cos\theta$ の多項式で表すことができます．（数学的帰納法を用いれば容易に示せます．）チェビシェフ多項式と呼ばれる有名問題を題材にしています．一般に，0 以上の整数に対してチェビシェフ多項式 $T_n(x)$ は，

$$\cos n\theta = T_n(\cos\theta)$$

と表されます．$n = 2, 3$ のときは，それぞれ2倍角の公式・3倍角の公式としてなじみがあると思います．本問は，$n = 5$ のときを扱っています．

このチェビシェフ多項式は様々な大学で出題されています．本問は，京都大学文系で出題された問題ですが，同年の京都大学理系の問題で，もう少し一般的な問題が出題されています．

問題 （'96　京都大）

n は自然数とする．

（1）　すべての実数 θ に対し

$$\cos n\theta = f_n(\cos\theta), \quad \sin n\theta = g_n(\cos\theta)\sin\theta$$

を満たし，係数がともにすべて整数である n 次式 $f_n(x)$ と $n-1$ 次式 $g_n(x)$ が存在することを示せ．

（2）　$f_n'(x) = ng_n(x)$ であることを示せ．

（3）　p を 3 以上の素数とするとき，$f_p(x)$ の $p-1$ 次以下の係数はすべて p で割り切れることを示せ．

証明の概略ですが，(1) は数学的帰納法で示します．(2) は，$\cos n\theta = f_n(\cos\theta)$ の両辺を θ で微分します．(3) は，$f_p(x)$ を具体的に表して，(2) の結果を利用します．