

37

('99 鹿児島大)

【難易度】…標準

負でない整数 k に対して $a_k = \int_0^1 e^{-x} x^k dx$ とおく。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $k \geq 1$ のとき、 a_k と a_{k-1} の間に成り立つ関係式を求めよ。
- (2) $b_k = \frac{a_k}{k!}$ とおく。 $k \geq 1$ のとき、 b_k と b_{k-1} の間の関係を求め、これよりすべての自然数 n に対して $b_n - b_0 = -e^{-1} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}$ が成り立つことを示せ。
- (3) すべての自然数 n に対して、不等式 $0 \leq a_n \leq \frac{1}{n+1}$ が成り立つことを示し、これを用いて $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ となることを証明せよ。