32 （'06　東北大） **【難易度】** … 標準

xyz 空間において半径が 1 で x 軸を中心軸として原点から両側に無限に伸びている円柱 C_1 と, 半径が 1 で y 軸を中心軸として原点から両側に無限に伸びている円柱 C_2 がある．C_1 と C_2 の共通部分のうち $y \leqq \dfrac{1}{2}$ である部分を K とおく．以下の問いに答えよ．

（1）　u を $-1 \leqq u \leqq 1$ を満たす実数とするとき，平面 $z = u$ による K の切断面の面積を求めよ．

（2）　K の体積を求めよ．

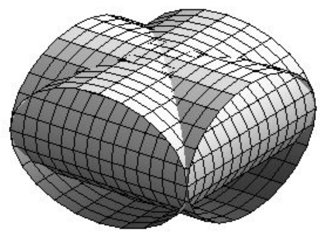
【テーマ】：２つの円柱の共通部分の体積

方針

想像しにくい立体ですが，一度は経験しておきたい図形です．いくつかの大学で類題が出題されています．

♣ ♠

解答



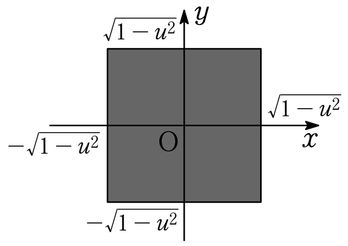
（1）　円柱 C_1 と円柱 C_2 の内部を表す式はそれぞれ,

$$\begin{cases} C_1 : y^2 + z^2 \leqq 1 & \cdots\cdots \ ① \\ C_2 : x^2 + z^2 \leqq 1 & \cdots\cdots \ ② \end{cases}$$

である．ここで，平面 $z = u\ (-1 \leqq u \leqq 1)$ による切断面を表す式は,
①, ② に $z = u$ を代入して得られる次の 2 つの不等式の共通部分である．

$$\begin{cases} y^2 \leqq 1 - u^2 \\ x^2 \leqq 1 - u^2 \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} |y| \leqq \sqrt{1-u^2} \\ |x| \leqq \sqrt{1-u^2} \end{cases}$$

$\sqrt{1-u^2} \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき，$1 - u^2 \leqq \dfrac{1}{4}$ より，$\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq |u| \leqq 1$ である．

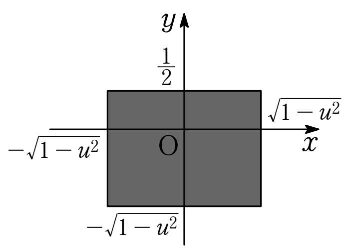


（ｉ）　$\sqrt{1-u^2} \leqq \dfrac{1}{2}$ すなわち $\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq |u| \leqq 1$ のとき,

切断面は，右図のようになるので，その面積を $S(u)$ とすると,

$$S(u) = \left(2\sqrt{1-u^2}\right)^2 = 4(1-u^2)$$

（ii）　$\sqrt{1-u^2} \geqq \dfrac{1}{2}$ すなわち $|u| \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき,



切断面は，右図のようになるので，その面積を $S(u)$ とすると,

$$\begin{aligned} S(u) &= 2\sqrt{1-u^2} \times \left(\frac{1}{2} + \sqrt{1-u^2}\right) \\ &= \sqrt{1-u^2} + 2(1-u^2) \end{aligned}$$

ゆえに,（ｉ),（ii）より，切断面の面積 $S(u)$ は,

$$\boldsymbol{S(u) = \begin{cases} 4(1-u^2) & \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq |u| \leqq 1\right) \\ \sqrt{1-u^2} + 2(1-u^2) & \left(|u| \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{cases}} \quad \cdots\cdots（\textbf{答}）$$

である．

(2) (1) の結果から，求める K の体積 V は，

$$V=2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left\{\sqrt{1-u^2}+2(1-u^2)\right\}du+\underbrace{2\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1}4(1-u^2)\,du}_{\text{① 2 つに分ける}}$$

$$=2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\sqrt{1-u^2}\,du+\underbrace{\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}4(1-u^2)\,du+\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1}4(1-u^2)\,du}_{\text{② 積分区間をつなげる}}+\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1}4(1-u^2)\,du$$

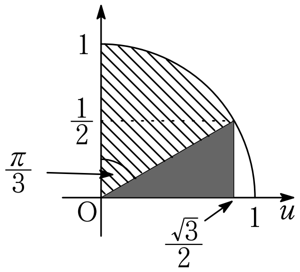
$$=2\underbrace{\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\sqrt{1-u^2}\,du}_{\text{(∗) 下図の面積を参考に値を計算}}+4\int_0^1(1-u^2)\,du+4\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1}(1-u^2)\,du$$

$$=2\left(\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)+4\left[u-\frac{1}{3}u^3\right]_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1}+4\left[u-\frac{1}{3}u^3\right]_0^1$$

$$=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}+4\cdot\frac{2}{3}-4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)+4\cdot\frac{2}{3}$$

$$=\boldsymbol{\frac{\pi}{3}+\frac{16}{3}-\frac{5\sqrt{3}}{4}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

である．



(∗) の積分計算で利用した面積

―――――― ◇ ―――――― ♡ ――――――

解説

共通部分の図が想像しにくいので，2 つの円柱が交わる様子をコンピュータで描いて解答中に掲載しました．想像力があれば解答の助けになることは間違いありませんが，図が想像できない問題でも解答できる力を養っておくことは大切です．切断面の様子が u の値によって変化し，なおかつ面積を求める方法も変わってくるので，場合分けが必要になるやや面倒な問題です．

(2) の体積計算ですが，$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\sqrt{1-u^2}\,du$ の計算を行う際に置換積分をする方法と，円の面積を用いる方法があります．解答では，扇形の面積に三角形の面積を加えるという考え方で定積分の値を計算しました．