30 【難易度】 … やや難

$\sum_{k=1}^{6} \sin k$ の符号を判別せよ．ただし，角の大きさは弧度法を用いてある．

【テーマ】：和積の公式の活用

方針

どれか 2 つを組合せて，和積の公式を活用します．同じ形が出てくるように組合せることがポイントです．

♣ ♠

解答

$\sum_{k=1}^{6} \sin k = \sin 1 + \sin 2 + \sin 3 + \sin 4 + \sin 5 + \sin 6$

であるから，和積の公式を適用して，

$$\begin{aligned} \sin 1 + \sin 6 &= 2\sin\frac{7}{2}\cos\frac{5}{2} \\ \sin 2 + \sin 5 &= 2\sin\frac{7}{2}\cos\frac{3}{2} \\ \sin 3 + \sin 4 &= 2\sin\frac{7}{2}\cos\frac{1}{2} \end{aligned}$$

を得るので，

$$\sum_{k=1}^{6} \sin k = 2\sin\frac{7}{2}\left(\cos\frac{1}{2} + \cos\frac{3}{2} + \cos\frac{5}{2}\right)$$

となる．このとき，$\sin\frac{7}{2} = \sin 3.5 < \sin\pi = 0$ である．…… ①

次に，$\cos\frac{1}{2} + \cos\frac{5}{2}$ に和積の公式を適用すると，

$$\begin{aligned} \cos\frac{1}{2} + \cos\frac{5}{2} &= 2\cos\frac{3}{2}\cos\frac{2}{2} \\ &= 2\cos\frac{3}{2}\cos 1 \end{aligned}$$

であるから，

$$\cos\frac{1}{2} + \cos\frac{3}{2} + \cos\frac{5}{2} = \cos\frac{3}{2}(1 + 2\cos 1)$$

を得る．このとき，

$$\cos\frac{3}{2} > \cos\frac{\pi}{2} = 0\ ,\ 1 + 2\cos 1 > 0$$

であることから，

$$\cos\frac{1}{2} + \cos\frac{3}{2} + \cos\frac{5}{2} > 0 \cdots\cdots ②$$

を得る．ゆえに，①, ② より，

$$\sum_{k=1}^{6} \sin k = 2\sin\frac{7}{2}\left(\cos\frac{1}{2} + \cos\frac{3}{2} + \cos\frac{5}{2}\right) < 0 \qquad \therefore\ \boldsymbol{\sum_{k=1}^{6} \sin k < 0} \cdots\cdots(\textbf{答})$$

である．

♢ ♡

解説

角度が弧度法で表されていることに注意しましょう．ちなみに 1 ラジアンは $\frac{180^\circ}{\pi} \fallingdotseq 57.3^\circ$ です．

© 大学受験・数学塾　管理人：makoto

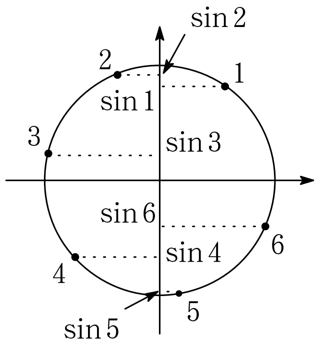
本問で必要とする知識は，和積の公式は当然ですが，$\sin x$, $\cos x$ の増減に関する知識が解答を左右します．$0 \leqq x \leqq 2\pi$ で考えるとき，

$\sin x$ は，$\dfrac{1}{2}\pi \leqq x \leqq \dfrac{3}{2}\pi$ では，単調減少ですがその他の区間では単調増加

です．したがって，$\sin 3.5 < \sin \pi$ が成り立ちます．同様にして，

$\cos x$ は，$0 \leqq x \leqq \pi$ では，単調減少ですがその他の区間では単調増加

です．したがって，$\cos \dfrac{3}{2} > \cos \dfrac{\pi}{2}$ が成り立ちます．このようにして，符号を判断しなければいけません．単位円をかいて，イメージすることも大切です．



ちなみに，問題の値は $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} \sin k \fallingdotseq -0.1$ です．0 に近くかなり微妙な値なので，感覚での解答は減点対象となります．

【和積の公式】

$$\begin{cases} \sin A + \sin B = 2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2} \\ \sin A - \sin B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2} \\ \cos A + \cos B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2} \\ \cos A - \cos B = -2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2} \end{cases}$$

【積和の公式】

$$\begin{cases} \sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\} \\ \cos\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\} \\ \cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\} \\ \sin\alpha\sin\beta = -\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\} \end{cases}$$

Ⓒ 大学受験・数学塾　管理人：makoto