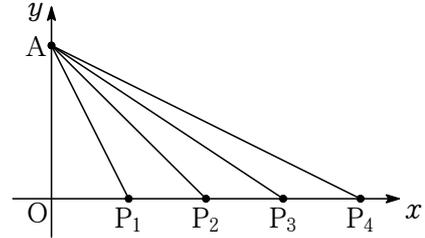


25

('06 首都大学東京)

【難易度】… 難

図のような座標平面上の点 $A(1, 0)$, $O(0, 0)$, $P_n(n, 0)$ (n は自然数) に対して, $\theta_n = \angle AP_nO$ とおく.



- (1) $\tan(\theta_m + \theta_n) = 1$, $m \leq n$ となる自然数の組 (m, n) をすべて求め, それ以外にない理由を述べなさい.
- (2) $\tan(\theta_l + \theta_m + \theta_n) = 1$, $l \leq m \leq n$ となる自然数の組 (l, m, n) をすべて求め, それ以外にない理由を述べなさい.

【テーマ】: 整数問題 (不定方程式・絞込み)

方針

(1) は, 傾きと \tan の関係を用いて, 加法定理を利用し不定方程式を導き出します. (2) は, 文字が 3 つあるので, 不定方程式を求めた後で絞込みを行う必要があります. 一番小さい文字 l はそんなに大きくなれないという点に注意して絞り込みます.

解答

- (1) 直線 AP_n の傾きは $-\frac{1}{n}$ であるから,

$$\tan(\pi - \theta_n) = -\frac{1}{n} \iff -\tan \theta_n = -\frac{1}{n} \iff \tan \theta_n = \frac{1}{n}$$

よって, 加法定理から

$$\begin{aligned} \tan(\theta_m + \theta_n) = 1 &\iff \frac{\tan \theta_m + \tan \theta_n}{1 - \tan \theta_m \tan \theta_n} = 1 \\ &\iff \frac{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{mn}} = 1 \\ &\iff \frac{m+n}{mn-1} = 1 \\ &\iff mn-1 = n+m \\ &\iff (m-1)(n-1) = 2 \end{aligned}$$

m, n は自然数より, $m-1 \geq 0, n-1 \geq 0$ であるから, かけて 2 となる組合せは

$$(m-1, n-1) = (1, 2), (2, 1) \iff (m, n) = (2, 3), (3, 2) \dots \dots (\text{答})$$

- (2) (1) と同様に考えて,

$$\begin{aligned} \tan(\theta_l + \theta_m + \theta_n) = 1 &\iff \frac{\tan(\theta_l + \theta_m) + \tan \theta_n}{1 - \tan(\theta_l + \theta_m) \tan \theta_n} = 1 \quad (\text{① } \theta_l + \theta_m \text{ を一塊と見て変形}) \\ &\iff \frac{\frac{l+m}{lm-1} + \frac{1}{n}}{1 - \frac{l+m}{lm-1} \cdot \frac{1}{n}} = 1 \quad (\because (1)) \\ &\iff \frac{nl + mn + lm - 1}{n(lm-1) - l - m} = 1 \\ &\iff nl + mn + lm - 1 = mnl - n - m - l \\ &\iff mnl + 1 = l + m + n + lm + mn + nl \quad \dots \dots \text{①} \end{aligned}$$

両辺を $lmn \neq 0$ で割ると,

$$1 + \frac{1}{lmn} = \frac{1}{mn} + \frac{1}{lm} + \frac{1}{nl} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$$

となる. 次に, $l \geq 4$ とすると, $l \leq m \leq n$ であることから, $m \geq 4, n \geq 4$ となり,

$$\frac{1}{mn} + \frac{1}{lm} + \frac{1}{nl} + \frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \frac{1}{l} \leq \frac{1}{4 \cdot 4} \times 3 + \frac{1}{4} \times 3 < 1$$

となり, (左辺) > 1 であることと矛盾するので不適. ゆえに, $l \leq 3$ である.

(i) $l = 1$ のとき, ① より,

$$0 = 2m + 2n \text{ となるので, これをみたす自然数 } m, n \text{ は存在しないので不適.}$$

(ii) $l = 2$ のとき, ① より,

$$mn - 3m - 3n = 1 \text{ となるので, } (m-3)(n-3) = 10$$

であり, $2 \leq m \leq n$ であることから,

$$(m-3, n-3) = (1, 10), (2, 5) \iff (m, n) = (4, 13), (5, 8)$$

(iii) $l = 3$ のとき, ① より,

$$mn - 2m - 2n = 1 \text{ となるので, } (m-2)(n-2) = 5$$

であり, $3 \leq m \leq n$ であることから,

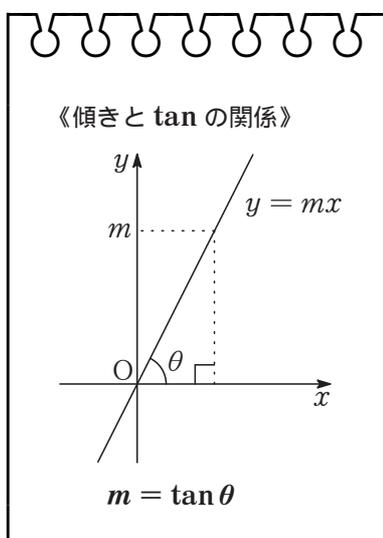
$$(m-2, n-2) = (1, 5) \iff (m, n) = (3, 7)$$

以上より, 求める l, m, n の組は,

$$(l, m, n) = (2, 4, 13), (2, 5, 8), (3, 3, 7) \dots \dots \text{(答)}$$

解説

(1) は加法定理を用いて計算すれば, 不定方程式が導き出されます.(2) も同様にして l, m, n の式が出せますが, 文字が 3 つあるので, (1) のように式変形して解くのは困難です. そこで, 一番小さい文字 l はそんなに大きくなれないという点に着目して, 値を絞り込みましょう.



《tan の加法定理》

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

(複号同順)