15 ('83 東京大) **【難易度】** … 標準

行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が表す xy 平面の 1 次変換 f が，次の条件 (i), (ii) を満たすとする.

(i) f は，任意の三角形をそれと相似な三角形に移す.

(ii) f は，点 $(1,\ \sqrt{3})$ を点 $(-2,\ 2\sqrt{3})$ に移す.

このような行列 A をすべて求めよ.

【テーマ】：１次変換

方針

任意の三角形をそれと相似な三角形に移すので特殊な三角形を考えてまずは必要条件を求めます．次に十分性を確認して答えを求めていきます.

♣ ♠

解答

条件 (ii) より，

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix} \iff \begin{array}{ll} a+\sqrt{3}b=-2 & \cdots\cdots ① \\ c+\sqrt{3}d=2\sqrt{3} & \cdots\cdots ② \end{array}$$

また，A$(1,\ 0)$, B$(0,\ 1)$ の f による像は

$$\mathrm{A}'(a,\ c),\ \mathrm{B}'(b,\ d)$$

であり，f により直角二等辺三角形は直角二等辺三角形に移るので

$$\mathrm{OA}'=\mathrm{OB}' \text{ かつ } \mathrm{OA}'\perp\mathrm{OB}'$$

$$\mathrm{OA}'=\mathrm{OB}' \iff a^2+c^2=b^2+d^2 \quad \cdots\cdots ③$$

$$\mathrm{OA}'\perp\mathrm{OB}' \iff \overrightarrow{\mathrm{OA}'}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}'}=0$$

$$ab+cd=0 \quad \cdots\cdots ④$$

①, ② を ④ へ代入して

$$(-\sqrt{3}b-2)b+(2\sqrt{3}-\sqrt{3}d)d=0 \iff \sqrt{3}(b^2+d^2)+2b-2\sqrt{3}d=0 \cdots\cdots ⑤$$

①, ② を ③ へ代入して

$$b^2+d^2=(2+\sqrt{3}b)^2+(2\sqrt{3}-\sqrt{3}d)^2 \iff b^2+d^2+2\sqrt{3}b-6d+8=0 \cdots\cdots ⑥$$

⑤ − ⑥ × $\sqrt{3}$ より

$$2b-2\sqrt{3}d-6b+6\sqrt{3}d-8\sqrt{3}=0 \iff b=\sqrt{3}(d-2)$$

これを ⑥ へ代入して

$$3(d-2)^2+d^2+2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}(d-2)-6d+8=0 \iff (d-2)(d-1)=0$$

したがって，$d=1,\ 2$ を得る.

$d=1$ のとき，$b=-\sqrt{3}$ である，このとき，①, ② より，$a=1,\ c=\sqrt{3}$

$d=2$ のとき，$b=0$ である，このとき，①, ② より，$a=-2,\ c=0$

よって,

$$A=\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

逆に,

$$A=\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}\cos 60^\circ & -\sin 60^\circ\\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ\end{pmatrix}$$

は，原点まわり 60° の回転と相似比 2 の相似変換の合成変換を表すので題意をみたし,

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

は，y 軸対称と相似比が 2 の相似変換の合成変換を表すので題意をみたす．ゆえに，求める行列 A は,

$$\boldsymbol{A=\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

◇ ♡

解説

解答では，直角二等辺三角形を変換しましたが，正三角形を作って変換することもできます．具体的には，三角形 OAB を次のように設定します．

O$(0,\,0)$，A$(1,\,\sqrt{3})$，B$(2,\,0)$

こうすれば条件（ii）から点 A が点 A′ に移るので，点 B は点 $(2,\,2\sqrt{3})$ または $(-4,\,0)$ に移ることがわかります．これより行列 A を求めることもできます．この方法を用いれば，行列 A の成分を文字で置かなくても逆行列を利用して求めることができるので簡単です．ただし，十分性を確認しないといけないのは同じなので，注意が必要です．

十分性の確認は，「回転移動と相似変換」の合成変換や「対称移動と相似変換」の合成変換であることから，図形の形が変わらないことがわかるので，題意をみたしていると判断しています．したがって，形が変わるような変換を伴う場合は十分性は言えないので注意しましょう．