10 （'99　新潟大） **【難易度】** … やや難

数列 $\{a_n\}$ を $a_n = \int_0^1 x^n e^x\,dx$ $(n=1,\,2,\,3,\,\cdots)$ で定める．ここで，e は自然対数の底である．このとき，次の問いに答えよ．

（1）　a_{n+1} と a_n の関係式を求めよ．

（2）　自然数 n に対して，$a_n = b_n e + c_n$ となる整数 $b_n,\,c_n$ があることを，数学的帰納法を用いて証明せよ．

（3）　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{c_n} = -\frac{1}{e}$ を示せ．

【テーマ】：積分と数列の融合

方針

(1), (2) は典型問題です．(3) では，不等式を作って極限値を計算しますが，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{c_n}$ を求めればよいことに気付けるかどうかがポイントです．

解答

（1）　a_{n+1} を，部分積分法を用いて計算すると，

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &= \int_0^1 x^{n+1}e^x\,dx \\
&= \Big[\, x^{n+1}e^x \,\Big]_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n e^x\,dx \\
&= e - (n+1)a_n
\end{aligned}
$$

ゆえに，求める漸化式は，$\boldsymbol{a_{n+1} = -(n+1)a_n + e}$……**(答)**

（2）　**【証明】**

（ｉ）　$n=1$ のとき，

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \int_0^1 xe^x\,dx \\
&= \Big[\, xe^x \,\Big]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx \\
&= e - \Big[\, e^x \,\Big]_0^1 = e-(e-1) = 1
\end{aligned}
$$

よって，$b_1 = 0,\ c_1 = 1$ とすれば，成り立つ．

（ii）　$n=k$ すなわち，

$$a_k = b_k e + c_k \qquad \cdots\cdots①$$

をみたす整数 $b_k,\,c_k$ が存在すると仮定すると，(1) で求めた漸化式に $n=k$ を代入して，

$$
\begin{aligned}
a_{k+1} &= -(k+1)a_k + e \\
&= -(k+1)(b_k e + c_k) + e \quad (\because\ ①) \\
&= \{1-(k+1)b_k\}e - (k+1)c_k
\end{aligned}
$$

よって，$b_{k+1} = 1-(k+1)b_k,\ c_{k+1} = -(k+1)c_k$ とすれば，$k,\,b_k,\,c_k$ はすべて整数であるから b_{k+1},

c_{k+1} も整数となり成り立つ.

ゆえに,（ⅰ),（ⅱ）よりすべての自然数 n について，題意は示された. **(証明終)**

(3) **【証明】**

$0 \leqq x \leqq 1$ において，$0 \leqq x^n e^x \leqq e^x$ が成り立つので,

$$\int_0^1 0\,dx \leqq \int_0^1 x^n e^x\,dx \leqq \int_0^1 e^x\,dx \qquad \therefore\ \ 0 \leqq a_n \leqq e-1 \cdots\cdots②$$

また,（2）から,

$$c_n = -nc_{n-1} \iff \frac{c_n}{n!} = -\frac{c_{n-1}}{(n-1)!} \qquad \text{（☜ 両辺を } n! \text{ で割った）}$$

となるので，$\dfrac{c_n}{n!} = (-1)^{n-1}\dfrac{c_1}{1!} \iff c_n = (-1)^{n-1}n!$

よって，② から

$$0 \leqq \left|\frac{a_n}{c_n}\right| \leqq \frac{e-1}{n!}$$

を得る．$n \to \infty$ のとき，$\dfrac{e-1}{n!} \to \infty$ であるから，はさみうちの原理より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{c_n} = 0$ となる.

さらに,（2）から $b_n = \dfrac{a_n - c_n}{e}$ であることより,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{c_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{a_n - c_n}{ec_n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{e}\left(\frac{a_n}{c_n} - 1\right)\\ &= -\frac{1}{e}\end{aligned}$$

ゆえに，示された. **(証明終)**

◇ ♡

解説

(1),（2）は頻出問題なので，確実に得点したいところです．漸化式を作るときは，部分積分法を使うことが多いので，しっかりと類題を演習して慣れておきましょう.

本問は,（3）での方針が立てにくいので，ここで時間を費やしてしまいます．ただ,（1),（2）を使って証明するのだろうという予想は立てられなければならないので,（1),（2）をうまく利用することを考えます．積分不等式を作って極限値を計算するのは頻出問題なのですが，ここでは直接それが答えとどのように結びつくかが見えにくいかもしれません．解答の方針を得るまでの考え方は次のようになります.

考え方

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{c_n} = -\frac{1}{e}$ を示すには，何を使えばいいのかな？（1),（2）を使うんだろうなぁ～…（2）で示した式って,

$$\frac{a_n}{c_n} = \frac{b_n}{c_n}e + 1$$

って変形できるなぁ～…あれっ！？この $\dfrac{b_n}{c_n}$ に $-\dfrac{1}{e}$ を代入したら

$$\frac{a_n}{c_n} = -\frac{1}{e}\cdot e + 1 = 0$$

になるから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{c_n} = 0$ が示されれば，題意は示せそうだな！

積分不等式を使って，極限値の計算をする場合は，はさみうちの原理がよく使われます．極限値が 0 になるようにする方が，計算しやすいことが多いのでこのような考えが出てくるのです.