7 （'05　弘前大） 【難易度】 … 標準

次の問いに答えよ．

（1）　関数 $f(x)$ に対し，等式 $\displaystyle\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx$ を証明せよ．

（2）　定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\sin^2 x}\,dx$ の値を求めよ．

【テーマ】：対称性を利用した定積分の計算

方針

$x = \pi - t$ とおいて，置換積分を行います．(2) は (1) を利用すればよいので，どの部分が $f(x)$ に対応するかを考えます．

♣ ♠

解答

（1）**【証明】**

$I = \displaystyle\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx$ において，$x = \pi - t$ とおくと，$dx = -dt$ で，

x と t の対応は右表のようになるので，

x	$0 \to \pi$
t	$\pi \to 0$

$$\begin{aligned}
I &= \int_{\pi}^{0} (\pi - t) f(\sin(\pi - t))\,(-dt)\\
&= \int_0^{\pi} (\pi - t) f(\sin t)\,dt\\
&= \int_0^{\pi} \pi f(\sin t)\,dt - \int_0^{\pi} t f(\sin t)\,dt\\
&= \int_0^{\pi} \pi f(\sin t)\,dt - I\\
2I &= \pi \int_0^{\pi} f(\sin t)\,dt\\
I &= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin t)\,dt \qquad \therefore\ \int_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx
\end{aligned}$$

よって，示された． **（証明終）**

（2）　$f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ とおくと，(1) より，

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\sin^2 x}\,dx &= \int_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx\\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx \qquad (\because\ (1))\\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\sin^2 x}\,dx\\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{2-\cos^2 x}\,dx\\
&= \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\int_0^{\pi} \left(\frac{\sin x}{\sqrt{2}-\cos x} + \frac{\sin x}{\sqrt{2}+\cos x} \right) dx\\
&= \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\int_0^{\pi} \left\{ \frac{(\sqrt{2}-\cos x)'}{\sqrt{2}-\cos x} - \frac{(\sqrt{2}+\cos x)'}{\sqrt{2}+\cos x} \right\} dx\\
&= \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \Big[\log\left(\sqrt{2}-\cos x\right) - \log\left(\sqrt{2}+\cos x\right) \Big]_0^{\pi}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\left[\left\{\log\left(\sqrt{2}+1\right)-\log\left(\sqrt{2}-1\right)\right\}-\left\{\log\left(\sqrt{2}-1\right)-\log\left(\sqrt{2}+1\right)\right\}\right]\\
&= \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left\{\log\left(\sqrt{2}+1\right)-\log\left(\sqrt{2}-1\right)\right\}\\
&= \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\log\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\\
&= \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\log\left(\sqrt{2}+1\right)^2\\
&= \boldsymbol{\frac{\pi}{\sqrt{2}}\log\left(\sqrt{2}+1\right)}\cdots\cdots(\textbf{答})
\end{aligned}
$$

◇ ♡

解説

(1) で示した等式を図形的に考えてみましょう．$F(x)=f(\sin x)$ とおくと，

$$F(\pi-x)=F(x) \iff F\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=F\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$$

が成り立ちます．これは，$F(x)$ が $x=\dfrac{\pi}{2}$ に関して対称であることを表しています．

また，$G(x)=\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)F(x)$ とおくと，

$$G(\pi-x)=\left(\frac{\pi}{2}-x\right)F(x)=-G(x) \iff G\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-G\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$$

となり，$G\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$ であることから，$G(x)$ は点 $\left(\dfrac{\pi}{2},0\right)$ に関して対称であることがわかります．ゆえに，

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\pi G(x)\,dx=\int_0^\pi\left(x-\frac{\pi}{2}\right)F(x)\,dx \iff \int_0^\pi G(x)\,dx=-\int_0^\pi G(x)\,dx\\
&\iff \int_0^\pi G(x)\,dx=0
\end{aligned}
$$

が導かれます．したがって，

$$\int_0^\pi\left(x-\frac{\pi}{2}\right)F(x)\,dx=0 \quad\iff\quad \int_0^\pi xF(x)\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi F(x)\,dx$$

を得ることができます．このように背景を考えることで問題の真意が見えてくることがあります．

ちなみに，(1) の最後のところでは，定積分の値は積分変数によらない．すなわち

$$\int_0^\pi F(t)\,dt=\int_0^\pi F(x)\,dx$$

であることを用いています．