

3 ('04 九州産業大学・改)

【難易度】…標準

実数 x, y の整式 P を $P = x^2 - 4xy + 5y^2 - 4y + 5$ とする.

- (1) P の最小値とそのときの x, y の値を求めよ.
 (2) $|x-1| \leq 2, |y| \leq 2$ とする. このとき, P の最小値を求めよ.

【テーマ】: 2変数関数の最大・最小

方針

(1) は, まず x で平方完成し, 続いて残った部分を y について平方完成します. (2) は, まず y を固定して (定数と考えて) x を変数と考え, その後 y を変数として考えます.

解答

$$(1) P = (x - 2y)^2 + y^2 - 4y + 5 = (x - 2y)^2 + (y - 2)^2 + 1$$

よって, $x = 2y$ かつ $y = 2$ すなわち,

$$x = 4, y = 2 \text{ のとき, 最小値 } 1 \cdots \cdots (\text{答})$$

をとる.

$$(2) |x-1| \leq 2 \text{ より } -2 \leq x-1 \leq 2 \text{ となるので } -1 \leq x \leq 3 \text{ となる.}$$

また, $|y| \leq 2$ より, $-2 \leq y \leq 2$ である. ここで, まず y を固定して x を動かすとき, すなわち P を x の関数として考えると, 軸の方程式は $x = 2y$ であり, $-2 \leq y \leq 2$ より $-4 \leq 2y \leq 4$ となる.

$$(i) -4 \leq 2y \leq -1 \text{ すなわち } -2 \leq y \leq -\frac{1}{2} \text{ のとき,}$$

$x = -1$ で最小値をとり, このとき

$$P = 5y^2 + 6$$

となるので, $y = -\frac{1}{2}$ のとき, 最小値をとる.

よって, その最小値は,

$$\frac{5}{4} + 6 = \frac{29}{4}$$

$$(ii) -1 \leq 2y \leq 3 \text{ すなわち } -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{3}{2} \text{ のとき,}$$

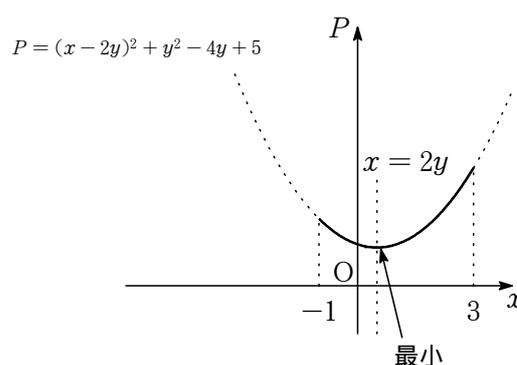
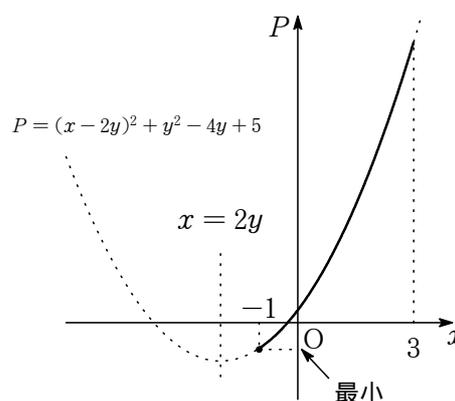
$x = 2y$ で最小値をとり, このとき

$$P = (y - 2)^2 + 1$$

となるので, $y = \frac{3}{2}$ のとき, 最小値をとる.

よって, その最小値は,

$$\left(\frac{3}{2} - 2\right)^2 + 1 = \frac{5}{4}$$



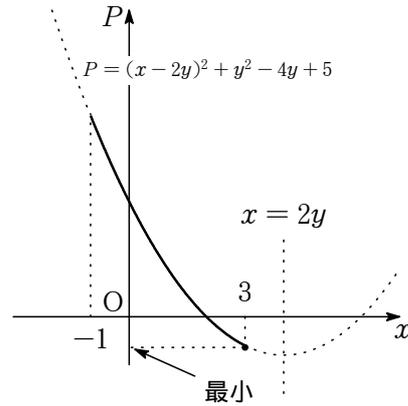
(iii) $3 \leq 2y$ すなわち $y \geq \frac{3}{2}$ のとき,

$x = 3$ で最小値をとり, このとき

$$\begin{aligned} P &= 9 - 12y + 5y^2 - 4y + 5 \\ &= 5y^2 - 16y + 14 \\ &= 5\left(y^2 - \frac{16}{5}y\right) + 14 \\ &= 5\left(y - \frac{8}{5}\right)^2 - \frac{64}{5} + 14 \\ &= 5\left(y - \frac{8}{5}\right)^2 + \frac{6}{5} \end{aligned}$$

よって, $y = \frac{8}{5}$ のとき, 最小値 $\frac{6}{5}$ をとる.

ゆえに, (i)~(iii) より, $x = 3, y = \frac{8}{5}$ のとき, 最小値 $\frac{6}{5}$ ……(答)



解説

2 変数関数の最大値・最小値を求める問題です。2 次関数の問題は様々な分野で応用されますので, 本質を理解しておく必要があります。(1) は, x, y に条件が付いていないので, すべての実数で考えます。この場合は, まず x に着目して平方完成し, 次いで残った部分を y に着目して平方完成すれば, $(\quad)^2 + (\quad)^2 + A$ という形を得ることができるので, 2 つの (\quad) 内が同時に 0 になるとき, 最小値 A を取ることがわかります。

(2) は, x, y に条件が付いているので厄介ですが, まず x を変数, y を定数と考えて, 平方完成します。これは,

$$y = x^2 - 4ax + 5a^2 - 4a + 5 \quad (-1 \leq x \leq 3) \text{ の最小値を求めよ。}$$

という問題と文字が違うだけで, ほとんど同じであることに気が付くでしょうか? 文字が別のものに入れ替わってしまうと全く違う問題に見えるという人は, 演習不足であるかまたは, この問題の本質が理解できていないこととなります。軸と定義域の位置関係に注意しながら場合分けをする典型的な問題です。本解答では, (i) で軸が定義域の左外側, (ii) で軸が定義域内, (iii) で軸が定義域の右外側にくると考えて場合分けをしています。最後に y にも範囲があるので, y のとり得る値の範囲を考慮にいれて P の最小値を求めています。そして, (i)~(iii) の中で最も小さい P が求めたい最小値になるというわけです。