2 （′03　大阪大） **【難易度】** … 標準

次の問いに答えよ．

（1） $0 < t < 1$ のとき，不等式 $\dfrac{\log t}{2} < -\dfrac{1-t}{1+t}$ が成り立つことを示せ．

（2） k を正の定数とする．$a > 0$ とし，曲線 $C : y = e^{kx}$ 上の 2 点 $\mathrm{P}(a,\ e^{ka})$，$\mathrm{Q}(-a,\ e^{-ka})$ を考える．このとき，P における C の接線と Q における C の接線の交点の x 座標は常に正であることを示せ．

【テーマ】：不等式の証明

方針

$f(t) < g(t)$ を示したいときは，$h(t) = g(t) - f(t)$ とおいて，$h(t) > 0$ を示します．(2) では，まず 2 接線の交点を求めることから始めましょう．後はどのようにして (1) を使うかを考えます．

♣ ♠

解答

（1） **【証明】**

$f(t) = -\dfrac{1-t}{1+t} - \dfrac{\log t}{2}$ とおくと，$0 < t < 1$ で常に $f(t) > 0$ であることを示せばよい．

$$\begin{aligned} f'(t) &= -\frac{-(1+t)-(1-t)}{(1+t)^2} - \frac{1}{2t} \\ &= \frac{2}{(1+t)^2} - \frac{1}{2t} \\ &= \frac{-(1-t)^2}{2t(1+t)^2} \end{aligned}$$

よって，$0 < t < 1$ において，$f'(t) < 0$ となるので，$f(t)$ は単調減少関数である．さらに，$f(1) = 0$ となることから，$0 < t < 1$ で $f(t) > 0$ となる．よって，示された． **（証明終）**

（2） **【証明】**

$y' = ke^{kx}$ であるから，点 P, Q における接線の方程式は，それぞれ

$$y = ke^{ka}(x-a) + e^{ka},\quad y = ke^{-ka}(x+a) + e^{-ka}$$

となる．この 2 直線の交点の x 座標は，

$$ke^{ka}(x-a) + e^{ka} = ke^{-ka}(x+a) + e^{-ka}$$

の解である．両辺 e^{ka} 倍すると，

$$ke^{2ka}(x-a) + e^{2ka} = k(x+a) + 1$$

$$(ke^{2ka} - k)x + (1-ak)e^{2ka} = ak + 1$$

$$k(e^{2ka} - 1)x = ak + 1 + (ak-1)e^{2ka}$$

$$k(e^{2ka} - 1)x = ak(1 + e^{2ka}) + 1 - e^{2ka}$$

$k > 0,\ a > 0$ より，$k(e^{2ka} - 1) \neq 0$ であるから，

$$x = \frac{ak(1+e^{2ka}) + 1 - e^{2ka}}{k(e^{2ka} - 1)}$$

$$= a\frac{e^{2ka}+1}{e^{2ka}-1}-\frac{1}{k}$$
$$= a\frac{1+e^{-2ka}}{1-e^{-2ka}}-\frac{1}{k}$$

ここで，$t=e^{-2ka}$ とおくと，$ka>0$ より $0<t<1$ をみたす．さらに，$k=-\frac{1}{2a}\log t$ が導かれるので，

$$\begin{aligned} x &= a\frac{1+t}{1-t}+\frac{2a}{\log t} \\ &= a\left(\frac{1+t}{1-t}+\frac{2}{\log t}\right) \cdots\cdots ① \end{aligned}$$

さらに，(1) より，$0<t<1$ のとき，

$\frac{\log t}{2}<-\frac{1-t}{1+t}<0$ であるから，$\frac{2}{\log t}>-\frac{1+t}{1-t}$

よって，$\frac{1+t}{1-t}+\frac{2}{\log t}>0$ となるので，① から，$x>0$ を得る．

ゆえに，交点の x 座標は常に正であることが示された． **(証明終)**

◇ ♡

解説

(1) はよくある基本問題なので，完答できるようにしておきましょう．

(2) は問題の流れから (1) を利用するのだろうと考えるのが自然です．したがって，(1) の形をどのようにして作り出すかが解決の鍵となります．また，$t=e^{-2ka}$ とおいた後は，$0<t<1$ を示すことも忘れてはいけません．なぜなら (1) の不等式は $0<t<1$ という条件の下で成り立つことを示したので，それを使うためには $0<t<1$ である必要があるからです．