1 （高知大） 【難易度】 … 標準

数列 $\{a_n\}$ が漸化式 $a_{n+1}=\dfrac{3a_n+2}{a_n+2}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$, $a_1=0$ で与えられている．

（1） $x=\dfrac{3x+2}{x+2}$ の 2 つの解を $\alpha,\ \beta\ (\alpha>\beta)$ とする．いま，$b_n=\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}$ とするとき，数列 $\{b_n\}$ は等比数列となることを示せ．

（2） a_n を求めて，$a_n<\alpha$ であることを示せ．

【テーマ】：隣接２項間漸化式

方針

分数型の隣接２項間漸化式です．丁寧に誘導しているので，その通りに解けばよいだけですが，（2）で $a_n<\alpha$ を示すには工夫した式変形が必要になります．

♣ ♠

解答

（1） **【証明】**

与えられた x に関する方程式を解くと，

$$x=\frac{3x+2}{x+2} \iff x^2+2x=3x+2 \iff x^2-x-2=0 \iff (x-2)(x+1)=0$$

したがって，$x=2,\ -1$ となる．$\alpha>\beta$ より，$\alpha=2,\ \beta=-1$ であるから，$b_n=\dfrac{a_n-2}{a_n+1}$ とおける．

これより，$b_n \fallingdotseq 1$ であるから，これを a_n について解くと次のようになる．

$$b_n=\frac{a_n-2}{a_n+1} \iff b_n(a_n+1)=a_n-2 \iff a_n=\frac{-b_n-2}{b_n-1}$$

これを与えられた漸化式へ代入すると，

$$\begin{aligned}
\frac{-b_{n+1}-2}{b_{n+1}-1}=\frac{3\cdot\dfrac{-b_n-2}{b_n-1}+2}{\dfrac{-b_n-2}{b_n-1}+2} &\iff \frac{-b_{n+1}-2}{b_{n+1}-1}=\frac{3(-b_n-2)+2(b_n-1)}{-b_n-2+2(b_n-1)}\\
&\iff \frac{-b_{n+1}-2}{b_{n+1}-1}=\frac{-b_n-8}{b_n-4}\\
&\iff (b_{n+1}+2)(b_n-4)=(b_{n+1}-1)(b_n+8)\\
&\iff b_{n+1}b_n-4b_{n+1}+2b_n-8=b_{n+1}b_n+8b_{n+1}-b_n-8\\
&\iff b_{n+1}=\frac{1}{4}b_n
\end{aligned}$$

$b_n=\dfrac{a_n-2}{a_n+1}$ より，$b_1=-2$ となるので，数列 $\{b_n\}$ は初項 -2，公比 $\dfrac{1}{4}$ の等比数列となる．

ゆえに，示された． **（証明終）**

（2） （1）より，$b_n=-2\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$ であるから，

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}-2}{-2\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}-1}\\
&= \frac{2-2\cdot 4^{n-1}}{-2-4^{n-1}}\\
&= \boldsymbol{\frac{2\cdot 4^{n-1}-2}{4^{n-1}+2}}\cdots\cdots\textbf{（答）}
\end{aligned}$$

【証明】

$$a_n = \frac{2(4^{n-1}+2)-6}{4^{n-1}+2} = 2 - \frac{6}{4^{n-1}+2}$$

と変形することができ，$n \geqq 1$ であることから，

$$4^{n-1} \geqq 1 \iff 4^{n-1}+2 \geqq 3 \iff \frac{4^{n-1}+2}{6} \geqq \frac{1}{2}$$

$$\iff 0 < \frac{6}{4^{n-1}+2} \leqq 2 \iff -2 \leqq -\frac{6}{4^{n-1}+2} < 0 \iff 0 \leqq 2 - \frac{6}{4^{n-1}+2} < 2$$

であるから，$0 \leqq a_n < 2$ となる．ゆえに，示された． **(証明終)**

別解

(1) の後半の別解

$b_n = \dfrac{a_n - 2}{a_n + 1}$ より，

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{a_{n+1}-2}{a_{n+1}+1} \\ &= \frac{\frac{3a_n+2}{a_n+2}-2}{\frac{3a_n+2}{a_n+2}+1} \\ &= \frac{3a_n+2-2(a_n+2)}{3a_n+2+a_n+2} \\ &= \frac{a_n-2}{4a_n+4} \\ &= \frac{1}{4}\cdot\frac{a_n-2}{a_n+1} \\ &= \frac{1}{4}b_n \end{aligned}$$

また，$b_1 = \dfrac{a_1-2}{a_1+1} = -2$ となるので，数列 $\{b_n\}$ は初項 -2，公比 $\dfrac{1}{4}$ の等比数列である．

◇ ♡

解説

$a_{n+1} = \dfrac{ra_n + s}{pa_n + q}$ $(s \neq 0)$ 型の漸化式を解く方法を丁寧に誘導してくれているので，それにしたがって解いていけばよい．この種の問題は大抵誘導してくれているので，計算をミス無く正確にこなすことが非常に大切である．

(2) では $a_n < \alpha$ を示す部分の式変形が未経験者にはやや難しいかもしれないが，知っておきたい式変形なので，是非身につけておこう．