41 【難易度】 … 標準

原点のまわりを反時計回りに θ 回転させる行列を $P(\theta)$ とし，行列 A を次のように定め，n は自然数とする．

$$A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

(1)　$\{P(\theta)\}^n=P(n\theta)$ であることを示せ．

(2)　A^6 および A^{6n} を単位行列 E を用いて表せ．

(3)　$E+A+A^2+\cdots\cdots+A^{6n-1}$ を求めよ．

【テーマ】：行列の累乗・回転行列

方針

(1) は，数学的帰納法を用いて証明を行います．(2) は，(1) で示したことを用いて，計算を行いましょう．(3) は，x^6-1 の因数分解を利用します．

♣ ♠

解答

(1) **【証明】**

題意から，$P(\theta)=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ である．

(ｉ) $n=1$ のとき．明らかに成り立つ．

(ii) $n=k$ のとき，すなわち，$\{P(\theta)\}^k=P(k\theta)$ が成り立つと仮定すると，

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix} \cos k\theta & -\sin k\theta \\ \sin k\theta & \cos k\theta \end{pmatrix}$$

両辺に，$P(\theta)$ を右からかけると，

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{k+1} &= \begin{pmatrix} \cos k\theta & -\sin k\theta \\ \sin k\theta & \cos k\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos k\theta\cos\theta-\sin k\theta\sin\theta & -(\cos k\theta\sin\theta+\sin k\theta\cos\theta) \\ \sin k\theta\cos\theta+\cos k\theta\sin\theta & -\sin k\theta\sin\theta+\cos k\theta\cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(k+1)\theta & -\sin(k+1)\theta \\ \sin(k+1)\theta & \cos(k+1)\theta \end{pmatrix}\end{aligned}$$

また，両辺に $P(\theta)$ を左からかけると，

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{k+1} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos k\theta & -\sin k\theta \\ \sin k\theta & \cos k\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos k\theta\cos\theta-\sin k\theta\sin\theta & -(\cos k\theta\sin\theta+\sin k\theta\cos\theta) \\ \sin k\theta\cos\theta+\cos k\theta\sin\theta & -\sin k\theta\sin\theta+\cos k\theta\cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(k+1)\theta & -\sin(k+1)\theta \\ \sin(k+1)\theta & \cos(k+1)\theta \end{pmatrix}\end{aligned}$$

したがって，$n=k+1$ のときも成り立つ．

よって，(ｉ),(ii) より，n が自然数のとき，$\{P(\theta)\}^n=P(n\theta)$ が成り立つ． **(証明終)**……**(答)**

(2)

$$A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\frac{4}{3}\pi & -\sin\frac{4}{3}\pi\\ \sin\frac{4}{3}\pi & \cos\frac{4}{3}\pi\end{pmatrix}$$

であるから，(1) より，

$$A^6=\begin{pmatrix}\cos\frac{4}{3}\pi & -\sin\frac{4}{3}\pi\\ \sin\frac{4}{3}\pi & \cos\frac{4}{3}\pi\end{pmatrix}^6=\begin{pmatrix}\cos 8\pi & -\sin 8\pi\\ \sin 8\pi & \cos 8\pi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E$$

ゆえに，$\boldsymbol{A^6=E,\ A^{6n}=E}$……**(答)**

(3)　$AE=EA=A$ であるから，次の等式が成り立つ．

$$(E-A)(E+A+A^2+\cdots\cdots+A^{6n-1})=E-A^{6n}$$

(2) より，$A^{6n}=E$ であるから，

$$(E-A)(E+A+A^2+\cdots\cdots+A^{6n-1})=O$$ （ただし，O ： 零行列）……① ☞ 公 式

$\Delta(E-A)\neq O$ であるから，$(E-A)^{-1}$ が存在するので，① の両辺に左から $(E-A)^{-1}$ をかけて，

$$\boldsymbol{E+A+A^2+\cdots\cdots+A^{6n-1}=O}$$……**(答)**

◇ ♡

解説

(1)　$P(\theta)$ の行列が分からないと手がつけられないので，原点まわりの回転を表す行列は必ず覚えておこう．原点のまわりに時計と反対方向に θ 回転させる行列 P は，

$$P=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

と表される．また，この設問の (1) で証明した関係式は，一般的に覚えておくとよいだろう．

またこのことは，別の考え方でも証明することができる．原点のまわりに θ 回転させる行列が

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

であれば，原点のまわりに 2θ 回転させる行列は，

$$\begin{pmatrix}\cos 2\theta & -\sin 2\theta\\ \sin 2\theta & \cos 2\theta\end{pmatrix}$$

である．原点のまわりに 2θ 回転させるということは，原点のまわりに θ 回転させることを 2 回繰り返すことであり，すなわちこれを n 回繰り返すことは，原点まわりに $n\theta$ 回転させることと同じである．よって，

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\cos n\theta & -\sin n\theta\\ \sin n\theta & \cos n\theta\end{pmatrix}$$

が成り立つ．

公 式 **【因数分解の公式】**

$$x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\cdots\cdots+x^2y^{n-3}+xy^{n-2}+y^{n-1})$$ （n は自然数）

$$x^n+y^n=(x+y)(x^{n-1}-x^{n-2}y+x^{n-3}y^2-\cdots\cdots+x^2y^{n-3}-xy^{n-2}+y^{n-1})$$ （n は自然数の奇数）