37 （'60　京都大） 【難易度】 … 標準

△ABC において，角と辺の間に，

$$\sin A : \sin B = \sqrt{2} : 1, \quad \overline{\mathrm{AB}}^2 = \overline{\mathrm{AC}}^2 + \sqrt{2}\,\overline{\mathrm{AB}}\cdot\overline{\mathrm{AC}}$$

なる関係があるとき，角 A, B, C はそれぞれ何度か．

【テーマ】：正弦定理・余弦定理

方針

第 1 式を正弦定理で辺の比に直します．次に第 2 式と余弦定理を使って，3 つの角のうち一つを決定します．

♣ ♠

解答

$\mathrm{BC} = a$, $\mathrm{CA} = b$, $\mathrm{AB} = c$ とする．正弦定理より，

$\sin A : \sin B = a : b$ であるから，$a : b = \sqrt{2} : 1$ すなわち $a = \sqrt{2}b$ ……①

が成り立つ．次に，

$$\overline{\mathrm{AB}}^2 = \overline{\mathrm{AC}}^2 + \sqrt{2}\,\overline{\mathrm{AB}}\cdot\overline{\mathrm{AC}} \iff c^2 = b^2 + \sqrt{2}cb \text{ ……②}$$

であり，余弦定理より，

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

が成り立つので，この式に ①, ② を代入して，

$$2b^2 = b^2 + b^2 + \sqrt{2}bc - 2bc\cos A \iff \sqrt{2}bc = 2bc\cos A$$

$$\iff \cos A = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\because\ bc \neq 0)$$

よって，$A = 45^\circ$ が得られる．また，

$$\sin A : \sin B = \sqrt{2} : 1 \iff \sin A = \sqrt{2}\sin B \iff \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\sin B$$

より，$\sin B = \dfrac{1}{2}$ となり，$A = 45^\circ$ であるから，$0^\circ < B < 135^\circ$ をみたす．これより $B = 30^\circ$ を得る．

したがって，

$$C = 180^\circ - (45^\circ - 30^\circ) = 105^\circ$$

となるので，求める角の大きさは，

$\boldsymbol{A = 45^\circ, B = 30^\circ, C = 105^\circ}$……(**答**)

別解

② 以降の別解です．

② から $c > b > 0$ が成り立ち，② の両辺を $b^2 \neq 0$ で割ると，

$$\left(\frac{c}{b}\right)^2 = 1 + \sqrt{2}\cdot\frac{c}{b} \iff \left(\frac{c}{b}\right)^2 - \sqrt{2}\cdot\frac{c}{b} - 1 = 0$$

となるので，解の公式でこれを解くと，$\dfrac{c}{b} = \dfrac{\sqrt{2}\pm\sqrt{6}}{2}$ を得るが，$\dfrac{c}{b} > 0$ より，

$$\frac{c}{b} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} \iff c = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}b \text{ ……③}$$

余弦定理より,

$$\begin{aligned}\cos B &= \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\\ &= \frac{\frac{8+4\sqrt{3}}{4}b^2+2b^2-b^2}{(\sqrt{2}+\sqrt{6})b\cdot\sqrt{2}b} \quad (\because\ ①, ③)\\ &= \frac{3+\sqrt{3}}{2(1+\sqrt{3})}\\ &= \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{2(1+\sqrt{3})}\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

よって, $B=30^\circ$ ($\because$ $0^\circ<B<180^\circ$) を得る. さらに,

$$\sin A:\sin B=\sqrt{2}:1 \iff \sin A=\sqrt{2}\sin B \iff \sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

より, $A=45^\circ$ または $A=135^\circ$ を得る.

$A=45^\circ$ のとき, $C=105^\circ$ であり, $A=135^\circ$ のとき, $C=15^\circ$ である.

ここで, $c>b$ より, $C>B$ となるので, 求める角の大きさは,

$\boldsymbol{A=45^\circ, B=30^\circ, C=105^\circ}$……**(答)**

◇ ♡

解説

比較的方針が立てやすく, 計算量も少ないので完答したい問題です. ただし, **別解** のように B を先に求めると, A と C が 2 組出てくるため, どちらか一つに絞る必要が出てきます. そのためには,

$$\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{AC}}^2+\sqrt{2}\,\overline{\mathrm{AB}}\cdot\overline{\mathrm{AC}}$$

から $c>b$ すなわち, $C>B$ となることを見抜かなければいけなくなります. これは, 次のようにして証明します.

$$c^2=b^2+\sqrt{2}bc \iff c^2-b^2=\sqrt{2}bc \iff (c-b)(c+b)=\sqrt{2}bc$$

ここで, $b+c>0$, $\sqrt{2}bc>0$ であるから, $c-b>0$ すなわち $c>b$ が示されます.