32 （'04　熊本大） **【難易度】** … 標準

x, y を実数とし，行列 $X = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ を考える．

（1） X に関する次の方程式を解け．ここで a, b は実数とする．

$$X^2 + aX + bE = O$$

（2） 方程式 $X^6 = E$ をみたす X をすべて求めよ．

【テーマ】：行列の累乗

方針

(1) は，ケーリー・ハミルトンの定理を使って，a, b の値を求めますが，単純に係数比較をしてはいけません．
(2) は，行列 X の形から回転行列であることを見極めて，$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ とおいて考えましょう．

♣ ♠

解答

（1） ケーリー・ハミルトンの定理より，

$$X^2 - 2xX + (x^2+y^2)E = O \iff X^2 = 2xX - (x^2+y^2)E$$

よって，

$$X^2 + aX + bE = O \iff 2xX - (x^2+y^2)E + aX + bE = O$$
$$\iff (2x+a)X - (x^2+y^2-b)E = O \cdots\cdots①$$

（ i ） $2x + a = 0$ のとき，

① より，$x^2 + y^2 = b$ であればよく，$x = -\dfrac{a}{2}$ より，

$$y^2 = b - \frac{a^2}{4}$$

ここで，$b < \dfrac{a^2}{4}$ のとき，$y^2 < 0$ となり解なし．よって，

$b \geqq \dfrac{a^2}{4}$ すなわち $a^2 - 4b \leqq 0$ のとき，$y = \pm\sqrt{b - \dfrac{a^2}{4}} = \pm\dfrac{\sqrt{4b-a^2}}{2}$

（ii） $2x + a \neq 0$ のとき，

$$X = \frac{x^2+y^2-b}{2x+a}E \iff \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{x^2+y^2-b}{2x+a} & 0 \\ 0 & \dfrac{x^2+y^2-b}{2x+a} \end{pmatrix}$$

このとき，成分を比較すると，

$$\begin{cases} x = \dfrac{x^2+y^2-b}{2x+a} & \cdots\cdots① \\ y = 0 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

② を ① へ代入して，

$$2x^2 + ax = x^2 - b \iff x^2 + ax + b = 0 \qquad \therefore\ x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2-4b}}{2}$$

よって，

$a^2-4b<0$ のとき，解なし

$a^2-4b=0$ のとき，$2x+a\fallingdotseq 0$ に反する

$a^2-4b>0$ のとき，$x=\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$

以上より，

$$\begin{cases} \boldsymbol{a^2-4b\leqq 0} \textbf{ のとき，}\quad \boldsymbol{X=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -a & \mp\sqrt{4b-a^2} \\ \pm\sqrt{4b-a^2} & -a \end{pmatrix}} \textbf{（複号同順）} \\ \boldsymbol{a^2-4b>0} \textbf{ のとき，}\quad \boldsymbol{x=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \end{cases} \cdots\cdots\textbf{（答）}$$

(2)　$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta\ (r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$ とおくと，

$$X=\begin{pmatrix} r\cos\theta & -r\sin\theta \\ r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \qquad \therefore\ X^6=\begin{pmatrix} r\cos\theta & -r\sin\theta \\ r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}^6 = r^6\begin{pmatrix} \cos 6\theta & -\sin 6\theta \\ \sin 6\theta & \cos 6\theta \end{pmatrix}$$

となるので，

$$X^6=E \iff \begin{cases} r^6\cos 6\theta=1 \\ r^6\sin 6\theta=0 \end{cases}$$

よって，$r^6=1,\ 6\theta=2n\pi$（n は 0 以上の整数）となり，$0\leqq 6\theta<12\pi$ より，これをみたす θ の値は，

$$6\theta=0,\ 2\pi,\ 4\pi,\ 6\pi,\ 8\pi,\ 10\pi \qquad \therefore\ \theta=0,\ \frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi,\ \pi,\ \frac{4}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$$

また，r は正の実数より，$r=1$ となるので，

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

これをまとめると，

$$\boldsymbol{X=\pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \pm\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix},\ \pm\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}}\cdots\cdots\textbf{（答）}$$

◇ ♡

$\boxed{\text{解説}}$

ケーリー・ハミルトンの定理を用いて，X^2 を X の 1 次式で置き換えます．行列で表される方程式で係数比較をしてはいけないことをきちんと理解しておきましょう．ケーリー・ハミルトンは次数下げの道具という認識を持っておくとよいでしょう．

$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ の形をした行列は，回転行列となることを知っておきましょう．それを知っているという前提で $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ という置換が思いつくのです．回転行列がいつも $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ で与えられるとは限りません．