31 （'03　電気通信大） **【難易度】** … 標準

次の条件で定められる数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ．

$$a_1 = 7,\ a_{n+1} = \frac{7a_n + 3}{a_n + 5} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

（1） $b_n = a_n - k$ とおくとき，$b_{n+1} = \dfrac{\alpha b_n}{b_n + \beta}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ となるような定数 $k,\ \alpha,\ \beta$ をみつけよ．ただし $k>0$ とする．

（2） $c_n = \dfrac{1}{b_n}$ とおく．数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ．

（3） 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．さらに，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

【テーマ】：隣接２項間漸化式

方針

$a_n =$ の形に変形して，与えられた漸化式に代入します．あとは，$\{b_n\}$ の漸化式が出てくるので，係数比較をして $\alpha,\ \beta$ の値を決定します．

分数型の隣接 2 項間漸化式です．もしも分子が pa_n の形になっていれば逆数をとればよいのですが，本問のように分子が $pa_n + q$ $(q \neq 0)$ の形になっているときは逆数をとっても解けません．しかし，このような問題では小問で誘導されていることが多いため，解答の流れを経験しておけば十分でしょう．

♣ ♠

解答

（1） $a_n = b_n + k$ より，与えられた漸化式に代入して，

$$\begin{aligned}
b_{n+1} + k &= \frac{7(b_n + k) + 3}{b_n + k + 5} \\
b_{n+1} &= \frac{7b_n + 7k + 3 - k(b_n + k + 5)}{b_n + k + 5} \\
&= \frac{7b_n + 7k + 3 - kb_n - k^2 - 5k}{b_n + k + 5} \\
&= \frac{(7-k)b_n - k^2 + 2k + 3}{b_n + k + 5}
\end{aligned}$$

よって，係数を比較して，

$$\begin{cases} 7 - k = \alpha & \cdots\cdots ① \\ k + 5 = \beta & \cdots\cdots ② \\ -k^2 + 2k + 3 = 0 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

がすべて成り立てばよい．③ より，

$$k^2 - 2k - 3 = 0 \iff (k-3)(k+1) = 0 \quad \therefore\ k = -1,\ 3$$

$k>0$ より，$k = 3$ であるから，このとき，①, ② より，

$$\boldsymbol{k = 3,\ \alpha = 4,\ \beta = 8} \cdots\cdots \textbf{(答)}$$

（2） （1）より，

$$b_{n+1} = \frac{4b_n}{b_n + 8},\quad b_1 = a_1 - 3 = 4$$

であるから，$b_n>0$ $(n = 1,\ 2,\ \cdots)$．よって，両辺の逆数をとると，

$$\frac{1}{b_{n+1}}=\frac{b_n+8}{4b_n} \iff \frac{1}{b_{n+1}}=2\frac{1}{b_n}+\frac{1}{4}$$

$c_n=\dfrac{1}{b_n}$ より，

$$c_{n+1}=2c_n+\frac{1}{4} \iff c_{n+1}+\frac{1}{4}=2\left(c_n+\frac{1}{4}\right)$$

よって，数列 $\left\{c_n+\dfrac{1}{4}\right\}$ は，初項 $c_1+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}$，公比 2 の等比数列であるから，

$$c_n+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\cdot 2^{n-1} \iff \boldsymbol{c_n=\frac{1}{4}(2^n-1)}\cdots\cdots\textbf{(答)}$$

(3) (2) より，

$$b_n=\frac{1}{c_n}=\frac{4}{2^n-1}$$

であり，(1) から，

$$\begin{aligned} a_n &= b_n+3 \\ &= \frac{4}{2^n-1}+3 \\ &= \boldsymbol{\frac{3\cdot 2^n+1}{2^n-1}}\cdots\cdots\textbf{(答)} \end{aligned}$$

◇ ♡

解説

小問で丁寧に誘導しているので，非常に解きやすく解答の流れがわかりやすい問題です．志望校の過去問を研究する際は誘導が丁寧かどうかまで調べておきましょう．もしも誘導が丁寧ならよいのですが，誘導が無い問題が多く出題されている大学であれば，自分で小問を補わなければならないので，本問のように複雑な場合は解答の流れまでしっかりと理解しておく必要があります．