

20 ('08 東京医科歯科大)

【難易度】 … 標準

微分可能な関数 $f(x), g(x)$ が次の 4 条件を満たしている .

- (a) 任意の正の実数 x について $f(x) > 0, g(x) > 0$
 (b) 任意の実数 x について $f(-x) = f(x), g(-x) = -g(x)$
 (c) 任意の実数 x, y について $f(x+y) = f(x)f(y) + g(x)g(y)$
 (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = 2$

このとき以下の各問いに答えよ .

- (1) $f(0)$ および $g(0)$ を求めよ .
 (2) $\{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^2$ を求めよ .
 (3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-f(x)}{x^2}$ を求めよ .
 (4) $f(x)$ の導関数を $g(x)$ を用いて表せ .
 (5) 曲線 $y = f(x)g(x)$, 直線 $x = a$ ($a > 0$) および x 軸で囲まれる図形の面積が 1 のとき $f(a)$ の値を求めよ .

【テーマ】: 関数方程式

方針

 $x = y = 0$ を代入したり, $y = -x$ を代入したり, 微分の定義式を用いたりして計算します .

解答

- (1) 条件 (b) に
- $x = 0$
- を代入すると,

$$g(0) = 0 \cdots \cdots (\text{答})$$

条件 (c) に $x = y = 0$ を代入すると,

$$f(0) = f(0) \cdot f(0) \iff \{f(0)\}^2 - f(0) = 0 \quad \therefore f(0) = 0, 1$$

ここで, 条件 (c) に $x = 0, y = 1$ を代入すると,

$$f(1) = f(0) \cdot f(1) + g(0) \cdot g(1) \iff f(1)\{1 - f(0)\} = 0$$

 $f(1) > 0$ より, $f(0) = 1$ であるから, $f(0) = 1 \cdots \cdots (\text{答})$

- (2) 条件 (c) に
- $y = -x$
- を代入して,

$$f(0) = f(x) \cdot f(-x) + g(x) \cdot g(-x) \iff 1 = f(x) \cdot f(x) + g(x) \cdot (-g(x)) \quad (\because (b))$$

よって, $\{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^2 = 1 \cdots \cdots (\text{答})$

- (3) (2) より,

 $-\{g(x)\}^2 = 1 - \{f(x)\}^2 = \{1 - f(x)\}\{1 + f(x)\}$ より,

$$-\frac{\{g(x)\}^2}{x^2} = \frac{1 - f(x)}{x} \cdot \frac{1 + f(x)}{x}$$

よって,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-f(x)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+f(x)} \cdot \left\{ -\left(\frac{g(x)}{x}\right)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{1+f(0)} \cdot (-4) \quad (\because (d)) \\ &= -2 \cdots \cdots (\text{答})\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)f(h) + g(x)g(h) - f(x)}{h} \quad (\because (c)) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)(f(h) - 1) + g(x)g(h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(-f(x) \cdot \frac{1-f(h)}{h^2} \cdot h + \frac{g(x)g(h)}{h} \right) \\ &= -f(x) \cdot (-2) \cdot 0 + g(x) \cdot 2 \\ &= 2g(x) \cdots \cdots (\text{答})\end{aligned}$$

(5) 条件 (a) より, $x > 0$ で $y = f(x)g(x)$ は常に正であり, $g(0) = 0, f(0) = 1$ より, 求める図形の面積を S とすると,

$$\begin{aligned}S &= \int_0^a f(x)g(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^a f(x)f'(x) dx \quad (\because (4)) \\ &= \left[\frac{1}{4} \{f(x)\}^2 \right]_0^a \\ &= \frac{1}{4} [\{f(a)\}^2 - \{f(0)\}^2] \\ &= \frac{1}{4} (\{f(a)\}^2 - 1)\end{aligned}$$

$S = 1$ より,

$$4 = \{f(a)\}^2 - 1 \iff \{f(a)\}^2 = 5$$

$f(a) > 0$ より, $f(a) = \sqrt{5} \cdots \cdots (\text{答})$

◇ ————— ♡

解説

関数方程式の問題は, 何かの関数がモデルになっていることが多いです. 本問は, 条件 (b), (c) から三角関数の一種ではないかという予想がつかます. 実際は, 双曲線関数がモデルになっているようです. (双曲線関数については, 大学で学習するので, 高校数学の範囲外です.) 関数方程式は, $x = y = 0$ などを代入したり, $y = -x$ を代入したりと, 解き方がある程度決まっているので, 何題か演習してコツをつかんでおきましょう.