19 ('01 名古屋市立大) **【難易度】** … |難|

n を自然数とするとき，次の問いに答えよ．

(1) 不等式 $n! \geqq 2^{n-1}$ を示せ．

(2) 不等式 $\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}<2$ を示せ．

(3) 不等式 $\dfrac{(n+1)^n}{n^n}<3$ を示せ．

【テーマ】：数学的帰納法と不等式の証明

方針

(1) は数学的帰納法で証明します．(2) は (1) で示した不等式を用いて証明します．(3) は二項定理を用いて左辺を展開しましょう．

♣ ♠

解答

(1) **【証明】**

(i) $n=1$ のとき，

$$(\text{左辺})=1!=1,\quad (\text{右辺})=2^{1-1}=1$$

よって，$n=1$ のとき，成り立つ．

(ii) $n=k$ すなわち

$$k! \geqq 2^{k-1} \quad \cdots\cdots①$$

が成り立つと仮定すると，① の両辺に $k+1>0$ をかけて，

$$(k+1)! \geqq (k+1)2^{k-1} \geqq 2\cdot 2^{k-1} \quad (\because\ \ k \geqq 1)$$

よって，$(k+1)! \geqq 2^k$ となり，$n=k+1$ のときも成り立つ．

ゆえに，(i), (ii) より，すべての自然数 n に対して，$n! \geqq 2^{n-1}$ が成り立つことが示された． **【証明終】**

(2) **【証明】**

(1) より，$n! \geqq 2^{n-1}$ であるから，

$$\frac{1}{n!} \leqq \frac{1}{2^{n-1}}$$

が成り立つ．この式に $n=1, 2, 3, \cdots$ を代入すると，

$$\frac{1}{1!} \leqq \frac{1}{1}$$
$$\frac{1}{2!} \leqq \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{3!} \leqq \frac{1}{2^2}$$
$$\vdots$$
$$\frac{1}{n!} \leqq \frac{1}{2^{n-1}}$$

となるので，辺々加えると，

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!} \leqq \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

である．この式の右辺は，初項 1 ，公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列の和であるから，

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}<2 \quad \left(\because \ 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n<1\right)$$

ゆえに，示された． **【証明終】**

(3) **【証明】**

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n\\ &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\\ &= \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \left(\frac{1}{n}\right)^k\\ &= 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{{}_n\mathrm{C}_k}{n^k}\end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{{}_n\mathrm{C}_k}{n^k} &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{n^k}\\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{n^k}\cdot\frac{1}{k!}\\ &= 1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\cdot\frac{1}{k!}\\ &\leqq \frac{1}{k!}\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &\leqq 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\\ &< 1+2 \quad (\because \ (2))\\ &= 3=(\text{右辺})\end{aligned}$$

となり，示された． **【証明終】**

◇ ♡

解説

(3) を証明するために，(1), (2) で準備をしています．証明の流れをしっかりとつかみましょう．(3) は式変形に経験がないと難問です．難関大学を受験する人は，一度は経験しておきたい問題です．

(1) は，自然数 n に関する不等式の証明なので，数学的帰納法が有効でしょう．この問いは完答しなければいけません．

(2) は，右辺が n の式ではないため数学的帰納法で証明することができません．したがって，解答 では，(1) を利用して解答しています．

(3) は，左辺を二項定理で書き下すという発想が必要になります．