18 【難易度】 … 標準

$n \geqq 2$ とする．無限級数

$$x^n + x^{n-1}\sin x + x^{n-2}\sin^2 x + \cdots\cdots + x^{n-k}\sin^k x + \cdots\cdots$$

がある．ただし，x は $x \neq 0$ をみたす実数とする．

(1) 与えられた無限級数は収束することを示し，その和 $f_n(x)$ を求めよ．

(2) $x \geqq 0$ のとき，不等式 $x - \dfrac{x^3}{6} \leqq \sin x \leqq x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}$ が成り立つことを証明せよ．

(3) $\displaystyle\lim_{x \to +0} f_2(x)$ の値を求めよ．

【テーマ】：無限等比級数の和

方針

与えられた無限級数が，無限等比級数であることを見抜きます．その公比が 1 より小さければ，無限等比級数の和が収束することを用いて，和を計算します．(3) では，(2) で示した不等式を用いて，はさみうちの原理を利用します．

♣ ♠

解答

(1) 与えられた無限級数は，

$$x^n + x^n\frac{\sin x}{x} + x^n\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 + \cdots\cdots + x^n\left(\frac{\sin x}{x}\right)^k + \cdots\cdots$$

と変形できるので，初項 x^n ，公比 $\dfrac{\sin x}{x}$ の無限等比級数である．ここで，$f(x) = x - \sin x$ とおくと，

$$f'(x) = 1 - \cos x \geqq 0$$

であるから，$f(x)$ は単調増加である．$f(0) = 0$ であるから，

$$\begin{cases} x>0 \text{ のとき，} \quad x > \sin x \cdots\cdots ① \\ x<0 \text{ のとき，} \quad x < \sin x \end{cases}$$

が成り立つので，$x \neq 0$ で，$-1 < \dfrac{\sin x}{x} < 1$ である．ゆえに，与えられた無限級数は収束し，その和は，

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \frac{x^n}{1 - \dfrac{\sin x}{x}} \\ &= \boldsymbol{\frac{x^{n+1}}{x - \sin x}} \cdots\cdots \textbf{(答)} \end{aligned}$$

(2) **【証明】**

$g(x) = \sin x - x + \dfrac{x^3}{6}$ とおくと，

$$\begin{aligned} g'(x) &= \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \\ g''(x) &= -\sin x + x \geqq 0 \quad (\because\ x \geqq 0,\ ①) \end{aligned}$$

ゆえに，$g'(x)$ は単調増加であり，$g'(0) = 0$ であるから，$g'(x) \geqq 0$ が成り立つので，$g(x)$ は単調増加である．さらに，$g(0) = 0$ であるから，$g(x) \geqq 0$ が成り立ち，

$$x-\frac{x^3}{6} \leqq \sin x$$

が示された．次に，$h(x)=x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}-\sin x$ とおくと，同様にして，

$$\begin{aligned} h'(x) &= 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\cos x \\ h''(x) &= -x+\frac{x^3}{6}+\sin x \\ &= g(x) \geqq 0 \end{aligned}$$

ゆえに，$h'(x)$ は単調増加であり，$h'(0)=0$ であるから，$h'(x) \geqq 0$ が成り立つので，$h(x)$ は単調増加である．さらに，$h(0)=0$ であるから，$h(x) \geqq 0$ が成り立ち，

$$\sin x \leqq x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$$

が示された．ゆえに，与えられた不等式は示された． **(証明終)……(答)**

(3) (1) より，$f_n(x)=\dfrac{x^{n+1}}{x-\sin x}$ であるから，

$$f_2=\frac{x^3}{x-\sin x}$$

である．ここで，求める極限は $x \to +0$ であるから，$x>0$ で考えてよいので，(2) の不等式より，

$$\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{120} \leqq x-\sin x \leqq \frac{x^3}{6} \iff \frac{1}{6}-\frac{x^2}{120} \leqq \frac{x-\sin x}{x^3} \leqq \frac{1}{6}$$

が成り立つので，$x \to +0$ のとき，はさみうちの原理より，

$$\lim_{x\to+0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}$$

である．ゆえに，

$$\lim_{x\to+0} f_2(x)=\lim_{x\to+0}\frac{x^3}{x-\sin x}=\frac{1}{\frac{1}{6}}=\mathbf{6}$$ **……(答)**

解説

(2) で証明している不等式は，入試でもしばしば見られるものです．また，このように不等式を証明させておいて，極限を求めるような問題の場合は，ほぼ間違いなくはさみうちの原理を用いて極限を求めます．このような解答の流れをしっかりと理解しておくことで様々な応用問題に対応できるようになります．

(1) では，無限等比級数が収束することをいうために，公比 $\dfrac{\sin x}{x}$ の値の範囲が $-1<\dfrac{\sin x}{x}<1$ になることを証明しなければいけません．**解答** で用いている考え方は，分母と分子の大小関係に着目するため，$f(x)=x-\sin x$ とおいています．この証明なしに，「収束するので …」と述べると説明不足として点が与えられなくなるので要注意です．

(2) では，素直に大きいほうから小さいほうを引いて 0 以上になることを示します．

(3) では，(2) で証明した不等式を用いますが，まず $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{x-\sin x}{x^3}$ を求めてから，最後に逆数を取って極限の値を求めます．直接求めることが面倒であったり，困難である場合は，このような手法をとることがあります．