10 （'05　順天堂大・改） **【難易度】** … 標準

2 曲線 $y=\sin 2x$, $y=k\cos x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ がある．

（1）　$y=\sin 2x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と x 軸とで囲まれる部分の面積 S を求めよ．

（2）　$y=k\cos x$ が S を 2 等分するときの k の値を求めよ．

【テーマ】：面積２等分問題

方針

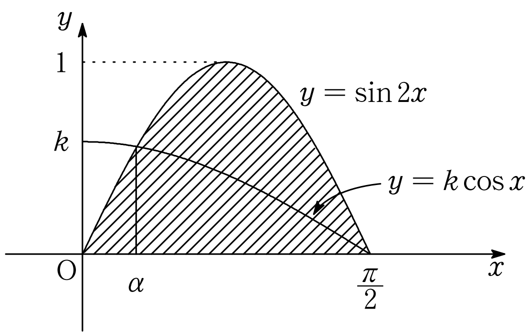
(2) では，$y=\sin 2x$ と $y=k\cos x$ の交点の x 座標を求めたくなりますが，実際に求めることができません．このような場合は，適当な文字 α などで代用します．

♣　♠

解答

（1）

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\, dx \\ &= \left[\frac{1}{2}(-\cos 2x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -\frac{1}{2}\cos\pi + \frac{1}{2}\cos 0 \\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2} \\ &= \mathbf{1} \cdots\cdots(\textbf{答}) \end{aligned}$$



（2）　$\sin 2x = k\cos x$ をみたす x の値を α とすると，

$$\sin 2\alpha = k\cos\alpha \iff k = 2\sin\alpha \cdots\cdots ① \quad (\because \cos\alpha \neq 0)$$

をみたす．題意と右上図から，$\alpha \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において，$y=\sin 2x$, $y=k\cos x$ で囲まれる部分の面積を T とすると，(1) から $T=\dfrac{1}{2}$ となればよい．

$$\begin{aligned} T &= \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x - k\cos x)\, dx \\ &= \left[\frac{1}{2}(-\cos 2x) - k\sin x\right]_\alpha^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{2} - k + \frac{1}{2}\cos 2\alpha + k\sin\alpha \end{aligned}$$

$T=\dfrac{1}{2}$ より，

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - k + \frac{1}{2}\cos 2\alpha + k\sin\alpha$$

$$0 = -k + \frac{1}{2}(1-2\sin^2\alpha) + k\sin\alpha$$

$$0 = -k + \frac{1}{2}\left(1-\frac{k^2}{2}\right) + \frac{k^2}{2} \quad (\because ①)$$

$$k^2 - 4k + 2 = 0$$

$$\therefore \quad k = 2 \pm \sqrt{2}$$

① より，$k \leqq 2$ であるから，$\boldsymbol{k = 2 - \sqrt{2}}$……(**答**)

解説

交点の x 座標が求まらないときは，文字で代用するというのは非常に大切な手法です．様々なところで活用できるので，必ず理解しておきましょう．