

7 ('99 三重大)

【難易度】…標準

放物線  $y = (x - a)^2 + a^2$  を  $a \geq 0$  の範囲で移動させたとき、放物線が通過してできる領域を図示せよ。

【テーマ】: 曲線の通過領域

## 方針

曲線が通過する領域内の点を  $(X, Y)$  とおいて、 $X, Y$  がみたす条件式を求めます。そのためには、与えられた放物線の方程式を  $a$  に関する 2 次方程式とみななければいけません。

直線や曲線の通過領域の問題は、よく出題される問題なのですが、なかなかイメージがつかめず、受験生からわかりにくいということをよく聞きます。簡単な例を挙げておきましょう。たとえば、放物線  $y = (x - a)^2 + a^2$  が点  $(1, 1)$  を通るかどうかを調べてみましょう。 $x = 1, y = 1$  を代入すると、

$$1 = (1 - a)^2 + 1 \iff a = 1$$

となるので、 $a \geq 0$  をみだし、 $a = 1$  のときに、確かに点  $(1, 1)$  を通ることがわかります。では点  $(2, -1)$  は通るでしょうか？同様に代入してみると、

$$-1 = (2 - a)^2 + 1 \iff (a - 2)^2 = -2$$

となり、これをみたすような実数  $a$  は存在しません。よって、与えられた放物線の  $a$  にどんな実数を代入しても点  $(2, -1)$  は通らないことがわかります。

つまり、もしもこの放物線が点  $(X, Y)$  を通るのであれば、それに対応する実数  $a$  が存在するはずなのです。ここで大切なことは、 $X, Y$  を  $(1, 1)$  のように定数として見なければいけないということです。そして、 $a$  を  $a \geq 0$  の範囲で動かすので、 $a$  を変数と見るのです。それが理解できれば、通過領域の問題は制覇したも同然でしょう！

## 解答

放物線  $y = (x - a)^2 + a^2$  が通過する領域内の点を  $(X, Y)$  とおくと、

$$Y = (X - a)^2 + a^2 \iff 2a^2 - 2Xa + X^2 - Y = 0$$

をみたく、これが  $a \geq 0$  の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもてばよい。

ここで、 $f(a) = 2a^2 - 2Xa + X^2 - Y$  とおくと、

$$f(a) = 2\left(a - \frac{X}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}X^2 - Y$$

よって、

$$(i) \quad \frac{X}{2} \geq 0 \text{ のとき } \frac{1}{2}X^2 - Y \leq 0$$

または

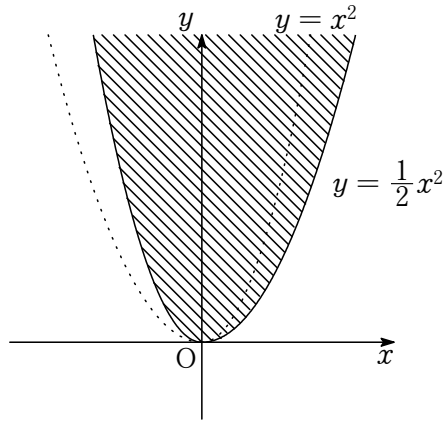
$$(ii) \quad \frac{X}{2} \leq 0 \text{ のとき } f(0) \leq 0$$

である。

(i) のとき、 $X \geq 0$  かつ  $Y \geq \frac{1}{2}X^2$  である。

(ii) のとき、 $X \leq 0$  かつ  $X^2 - Y \leq 0$  すなわち  $Y \geq X^2$  である。

ゆえに、求める通過領域は、次図の斜線部分で境界線上の点を含む。

**解説**

この問題は、2 次方程式の解の配置問題に帰着します．したがって、解の配置問題がしっかりできていないと解くことはできません．問題によっては、かなり複雑な条件が絡んでくることもありますが、結局考え方は同じなので、あせることはないでしょう．何が定数で何が変数として扱えばよいのかを演習を通して見分けられるようになることが大切なのです．