6 （′03　東京農工大・改） 【難易度】… 標準

$x,\,y,\,z$ は実数で，3 つの関係式

$$x+y+z=0\,,\ \ x^3+y^3+z^3=1\,,\ \ x^4+y^4+z^4=2$$

をみたしているとき，次の値を求めよ．

（1）　xyz　　（2）　$xy+yz+zx$　　（3）　$x^2+y^2+z^2$　　（4）　$x^5+y^5+z^5$

【テーマ】：3 次の対称式の計算

方針

まずは，3 次の基本対称式 $x+y+z,\,xy+yz+zx,\,xyz$ を求めることを考えます．そのための誘導設問が (1), (2) になります．与えられた 3 つの式を用い，因数分解の公式を利用して値を求めます．

♣ ♠

解答

(1)

$$\begin{aligned} x^3+y^3+z^3 &= (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz \\ &= 3xyz \quad (\because\ \ x+y+z=0) \end{aligned}$$

よって，$3xyz=1$ となるので，$xyz=\mathbf{\dfrac{1}{3}}$……(**答**)

(2)　$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$ であるから，$x+y+z=0$ を代入すると，

$$x^2+y^2+z^2=-2(xy+yz+zx)\ \cdots\cdots①$$

ここで，

$$x^4+y^4+z^4=(x^2+y^2+z^2)^2-2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$$

より，$xy+yz+zx=a$ とおくと，

$$\begin{aligned} 2=(-2a)^2-2\{a^2-2xyz(x+y+z)\} &\iff 2=4a^2-2a^2 \\ &\iff a^2=1 \\ &\iff a=\pm 1 \end{aligned}$$

ここで，① より $x^2+y^2+z^2\geqq 0$ であるから $a<0$．

$$\therefore\ \ a=-1\,．\ \text{ゆえに，}\ xy+yz+zx=\mathbf{-1}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

(3)　① より，$x^2+y^2+z^2=\mathbf{2}$……(**答**)

(4)

$$\begin{aligned} x^5+y^5+z^5 &= (x^2+y^2+z^2)(x^3+y^3+z^3)-x^2(y^3+z^3)-y^2(x^3+z^3)-z^2(x^3+y^3) \\ &= 2-(x^2y^3+x^2z^3+y^2x^3+y^2z^3+z^2x^3+z^2y^3) \end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned} x^2y^3+x^2z^3+y^2x^3+y^2z^3+z^2x^3+z^2y^3 &= x^2z^2(x+z)+x^2y^2(x+y)+y^2z^2(y+z) \\ &= -x^2yz^2-x^2y^2z-xy^2z^2 \quad (\because\ \ x+y+z=0) \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{3}xz - \frac{1}{3}xy - \frac{1}{3}yz$$
$$= -\frac{1}{3}(xy + yz + zx)$$
$$= \frac{1}{3}$$

したがって，$x^5 + y^5 + z^5 = 2 - \frac{1}{3} = \mathbf{\frac{5}{3}}$……(**答**)

別解

(2) 以降の別解です．

$f_n = x^n + y^n + z^n$ とおき，$xy + yz + zx = a$ とすると，解と係数の関係より，x, y, z を 3 解とする 3 次方程式は，

$$t^3 + at - \frac{1}{3} = 0$$

であるから，この式の両辺に t^n をかけて

$$t^{n+3} + at^{n+1} - \frac{1}{3}t^n = 0 \quad \cdots\cdots①$$

x, y, z は ① の 3 解なので，

$$\begin{cases} x^{n+3} + ax^{n+1} - \frac{1}{3}x^n = 0 & \cdots\cdots② \\ y^{n+3} + ay^{n+1} - \frac{1}{3}y^n = 0 & \cdots\cdots③ \\ z^{n+3} + az^{n+1} - \frac{1}{3}z^n = 0 & \cdots\cdots④ \end{cases}$$

②～④ の辺々を加えると，

$$f_{n+3} + af_{n+1} - \frac{1}{3}f_n = 0 \quad \cdots\cdots(*)$$

$(*)$ において，$n = 1$ とすると，

$$f_4 + af_2 - \frac{1}{3}f_1 = 0$$

$f_4 = 2, f_1 = 0$ より，

$$2 + af_2 = 0 \quad \cdots\cdots⑤$$

また，$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$ より，

$$0 = f_2 + 2a \quad \cdots\cdots⑥$$

⑤, ⑥ より，$2 - 2a^2 = 0$ であるから $a = \pm 1$ となる．$f_2 \geqq 0$ より，⑥ から $a<0$ であるから，$a = -1$.

よって，$\boldsymbol{a = -1, f_2 = 2}$……(**答**)

$(*)$ において $n = 2$ とすると，$f_5 - f_3 - \frac{1}{3}f_2 = 0$

$$f_5 = f_3 + \frac{1}{3}f_2 = 1 + \frac{2}{3} = \mathbf{\frac{5}{3}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

◇ ♡

解説

本問は，別解の方法を用いれば，漸化式が出てくるので，さらに次数が高い式でも値を求めることができることがわかると思います．このように汎用性のある解法を知っておくことは難関大学を受験する際には非常に重要なことです．