3 （小樽商大） **【難易度】** … 標準

a を正の定数とする．方程式 $|x^3-4x|=ax+a+1$ の実数解の個数を調べよ．

【テーマ】：実数解の個数

方針

左辺を $f(x)$，右辺を $g(x)$ として，$f(x)$ と $g(x)$ のグラフの交点の個数で考えます．その際に $g(x)$ が定点を通ることに着目すると見通しが立ちます．

方程式の実数解の個数を求める方法はいくつかあります．

（ｉ） 方程式を解いたり，2 次方程式ならば判別式を用いる．

（ii） グラフを利用する．

代表的なものを 2 つ上げましたが，本問では，（ii）を利用します．どのように式を変形し，グラフを利用するかで様々な解法が生まれる問題です．

♣ ♠

解答

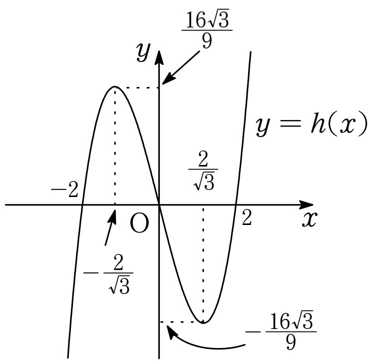
与えられた方程式の実数解の個数は，

$$f(x)=|x^3-4x|$$
$$g(x)=ax+a+1 \quad \cdots\cdots①$$

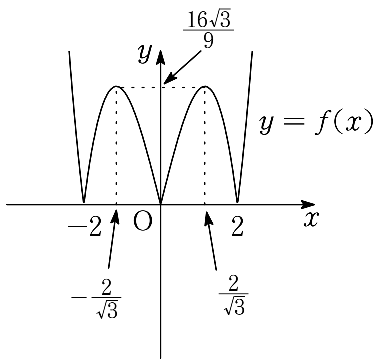
のグラフの交点の個数に等しい．$h(x)=x^3-4x$ とおくと，$h'(x)=3x^2-4$ であるから，$h'(x)=0$ のとき，$x=\pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ である．よって，増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	$-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\dfrac{2}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\dfrac{16\sqrt{3}}{9}$	↘	$-\dfrac{16\sqrt{3}}{9}$	↗

ゆえに，$y=h(x)$ のグラフは，図 1 のようになるので，$y=f(x)$ のグラフは図 2 のようになる．



【図 1】



【図 2】

ここで，$g(x)=ax+a+1=a(x+1)+1$ であるから，① は a の値にかかわらず点 $(-1,\ 1)$ を通ることがわかる．また，① が $y=-x^3+4x$ と第 1 象限で接するときを考えると，$y=-x^3+4x$ 上の点 $(t,\ -t^3+4t)$ における接線が $y=a(x+1)+1$ と一致するので，$y'=-3x^2+4$ であることから，

$$y=(-3t^2+4)(x-t)-t^3+4t \iff y=(-3t^2+4)x+2t^3$$

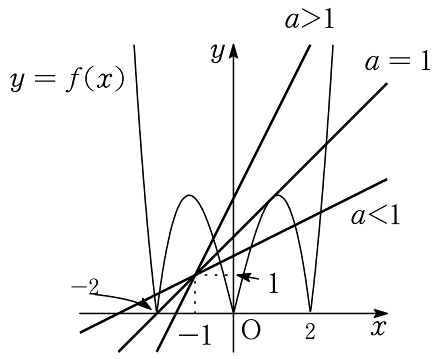
より，

$$\begin{cases} -3t^2+4=a \\ 2t^3=a+1 \end{cases} \iff -3t^2+5=2t^3 \iff (t-1)(2t^2+5t+5)=0$$

t は実数であるから，$t=1$ である．よって，このとき $a=1$ である．次に，$y=g(x)$ が点 $(-2,0)$ を通るとき，

$$0=-2a+a+1 \quad \therefore \quad a=1$$

ゆえに，グラフから，与えられた方程式の実数解の個数は，次のようになる．



$$\begin{cases} \mathbf{0<a<1\ のとき，\quad 6\ 個} \\ \mathbf{a=1\ のとき，\quad 4\ 個} \\ \mathbf{a>1\ のとき，\quad 2\ 個} \end{cases} \cdots\cdots(\textbf{答})$$

◇ ♡

[解説]

まずは，絶対値のグラフがかけないと話になりません．本問は，前述したように式の変形方法によって様々な解法が考えられます．

$$|x^3-4x|-1=a(x+1)$$

のように変形することもできますが，これは絶対値のグラフをかいてしまえば，本解の方法と大差がありません．ただ，絶対値のグラフをかくのがちょっと面倒なので，あまりよい変形とはいえません．また，定数を分離するという考え方を使えば，

$$\frac{|x^3-4x|-1}{x+1}=a$$

と変形できますが，x キ -1 のときしかこの変形ができないことに加えて左辺が複雑になりすぎて，数学 Ⅲ の知識が必要になります．もちろんグラフをかくのも大変になります．臨機応変に解法を使い分けられるようにしておくことが必要でしょう．