28　('04　慶應義塾大)　【難易度】… 標準

$a,\ b$ は正の整数とする．$\sqrt{3}$ は $\dfrac{a}{b}$ と $\dfrac{a+3b}{a+b}$ の間にあることを証明せよ．

【テーマ】：不等式の証明

方針

題意から $\dfrac{a}{b}<\sqrt{3}<\dfrac{a+3b}{a+b}$ または $\dfrac{a+3b}{a+b}<\sqrt{3}<\dfrac{a}{b}$ を示せばよい．

方針 で挙げたように考えるのが自然なのですが，これを証明するためには，どのように考えると最も簡単に示せるのでしょうか．これらの 2 式を変形すると，次のようになります．

$$\frac{a}{b}<\sqrt{3}<\frac{a+3b}{a+b} \iff \begin{cases} \dfrac{a}{b}-\sqrt{3}<0 \\ \dfrac{a+3b}{a+b}-\sqrt{3}>0 \end{cases}$$

$$\frac{a+3b}{a+b}<\sqrt{3}<\frac{a}{b} \iff \begin{cases} \dfrac{a}{b}-\sqrt{3}>0 \\ \dfrac{a+3b}{a+b}-\sqrt{3}<0 \end{cases}$$

$$\iff \left(\frac{a}{b}-\sqrt{3}\right)\left(\frac{a+3b}{a+b}-\sqrt{3}\right)<0$$

すなわち，$\left(\dfrac{a}{b}-\sqrt{3}\right)\left(\dfrac{a+3b}{a+b}-\sqrt{3}\right)<0$ が証明できればよいのです．このように，証明すべき式を自分で見つけてくるのが証明問題の一番のポイントになります．

ポイント

$$AB<0 \iff 「A>0 \text{ かつ } B<0」\text{または}「A<0 \text{ かつ } B>0」$$

解答

【証明】

$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{b}-\sqrt{3}\right)\left(\frac{a+3b}{a+b}-\sqrt{3}\right) &= \frac{a-\sqrt{3}b}{b}\cdot\frac{a+3b-\sqrt{3}(a+b)}{a+b} \\ &= \frac{a-\sqrt{3}b}{b}\cdot\frac{(1-\sqrt{3})(a-\sqrt{3}b)}{a+b} \\ &= \frac{(1-\sqrt{3})(a-\sqrt{3}b)^2}{b(a+b)}\end{aligned}$$

$a,\ b$ は正の整数であるから，$a-\sqrt{3}b \neq 0$ である．よって，

$$\frac{(1-\sqrt{3})(a-\sqrt{3}b)^2}{b(a+b)}<0$$

となるので，$\left(\dfrac{a}{b}-\sqrt{3}\right)\left(\dfrac{a+3b}{a+b}-\sqrt{3}\right)<0$ である．よって，$\dfrac{a}{b}-\sqrt{3}$ と $\dfrac{a+3b}{a+b}-\sqrt{3}$ は異符号であるから，
$\sqrt{3}$ は $\dfrac{a}{b}$ と $\dfrac{a+3b}{a+b}$ の間にあることが示された．　**(証明終)**……(答)

解説

証明を見ると簡単に感じてしまうかもしれませんが，アイデアが必要なので方法を知らなければ難しく感じるでしょう．ポイントにかいた不等式の変形はよく使う式変形なので，必ずマスターしておかなければいけません．この問題を一般化した問題が 1998 年に京都教育大学で出題されたことがあります．

問題　（’98　京都教育大）

a, b, n を自然数とするとき，$\dfrac{a}{b} \leqq \sqrt{n}$ ならば $\sqrt{n} \leqq \dfrac{a+nb}{a+b}$，$\dfrac{a}{b} \geqq \sqrt{n}$ ならば $\sqrt{n} \geqq \dfrac{a+nb}{a+b}$ であることを示せ．

内容的には同じであることがわかると思うので，実際に類題演習としてやってみるとよいでしょう．