27 （'02　大阪教育大）　**【難易度】**… 標準

自然数 n をそれより小さい自然数の和として表すことを考える．ただし，$1+2+1$ と $1+1+2$ のように和の順序が異なるものは別の表し方とする．たとえば，自然数 2 は，$1+1$ の 1 通りの表し方ができ，自然数 3 は，$2+1$, $1+2$, $1+1+1$ の 3 通りの表し方ができる．

（1）　自然数 4 の表し方は何通りあるか．

（2）　自然数 5 の表し方は何通りあるか．

（3）　2 以上の自然数 n の表し方は何通りあるか．

【テーマ】：重複組合せ

方針

自然数の数だけ○を用意して，仕切りによってこの○をいくつかの組に分ける．その分け方が求める場合の数と一致する．

場合の数は，考え方次第で様々な解法が考えられます．(1), (2) ならまともに数えても正解できるでしょうが，(3) は一般の場合を考えているので，数えることができません．(1), (2) は (3) の問題を解くときのヒントになっているのです．したがって，(1), (2) で数えてしまっては，(3) を解くことができません．ここは，法則を見つけて (3) を解くときのヒントを探しましょう．

ポイント

問題文の言い回しを別の表現で表す！

♣　♠

解答

（1）　○を 4 つ並べて，これを仕切りによって区切ることを考える．仕切りによって区切られた○の数を数字に対応させる．仕切りの数は ＋ の数に対応する．

自然数 4 を考えるので，○を 4 個用意する．

仕切り 1 本　……　3 通り

仕切り 2 本　……　3 通り

仕切り 3 本　……　1 通り

したがって，$3+3+1=$ **7 (通り)**……**(答)**

（2）　(1) と同様に考える．

自然数 5 を考えるので，○を 5 個用意する．

仕切り 1 本　……　${}_4C_1=4$ 通り

仕切り 2 本　……　${}_4C_2=6$ 通り

仕切り 3 本　……　${}_4C_3=4$ 通り

仕切り 4 本　……　${}_4C_4=1$ 通り

したがって，$4+6+4+1=$ **15 (通り)**……**(答)**

(3) (1), (2) と同様に考える．

自然数 n を考えるので，○を n 個用意する．仕切りの数は，$1 \sim n-1$ 本まで考えられてそれぞれの場合における場合の数は，

$$ {}_{n-1}\mathrm{C}_1,\ {}_{n-1}\mathrm{C}_2,\ \cdots,\ {}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1} $$

であるから，求める場合の数は，

$$ {}_{n-1}\mathrm{C}_1 + {}_{n-1}\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1} $$

である．ここで，二項定理より

$$ (x+1)^{n-1} = {}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1}x^{n-1} + {}_{n-1}\mathrm{C}_{n-2}x^{n-2} + \cdots + {}_{n-1}\mathrm{C}_1 x + {}_{n-1}\mathrm{C}_0 $$

が成り立つので，$x=1$ を代入すると，

$$ 2^{n-1} = {}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1} + {}_{n-1}\mathrm{C}_{n-2} + \cdots + {}_{n-1}\mathrm{C}_1 + 1 $$

ゆえに，求める場合の数は，

$$ {}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1} + {}_{n-1}\mathrm{C}_{n-2} + \cdots + {}_{n-1}\mathrm{C}_1 = \boldsymbol{2^{n-1}-1} $$ **(通り)**……(**答**)

◇ ♡

解説

(3) では，二項定理を利用しなければなりません．二項定理は余弦定理や正弦定理のようにあまり頻繁に使う定理ではないため，受験生の対策はおろそかになりがちです．しかも形が複雑なため嫌いな人が多い．しかし，計算の道具としては強力な力を持っており，意外な場面でよく登場してきます．苦手意識を持っていた人や食わず嫌いになっている人は，ここでもう一度二項定理と向き合ってみてください．受験が終わった後で後悔しないために…

公 式 **二項定理**

$$ \begin{aligned} (a+b)^n &= {}_n\mathrm{C}_0a^n + {}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b + {}_n\mathrm{C}_2a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_ra^{n-r}b^r + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1}ab^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_nb^n \\ &= \sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_ra^{n-r}b^r \end{aligned} $$

Σ を用いた形で覚えておくとよいでしょう．

次の式は，有名なので必ず知っておきましょう．これらの式をヒントに (3) は解いているのです．

$$ {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_r + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n = 2^n \qquad (a,\ b) = (1,\ 1) $$

$$ {}_n\mathrm{C}_0 - {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 - \cdots + (-1)^r{}_n\mathrm{C}_r + \cdots + (-1)^{n-1}{}_n\mathrm{C}_{n-1} + (-1)^n{}_n\mathrm{C}_n = 0 \quad (a,\ b) = (1,\ -1) $$