25 （'98　秋田大） 【難易度】… 標準

数列 $\{a_n\}$ に対して，

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(a_k+\frac{1}{k+1}\right)=2^n+1-\frac{1}{n+1}$$

がすべての自然数 n について成り立っているとき，次の問いに答えよ．

（1）　数列 $\{a_n\}$ の第 n 項 a_n を n の式で表せ．

（2）　$\sum_{k=1}^{n} a_k$ を求めよ．

【テーマ】：和と一般項の関係

方針

$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(a_k+\frac{1}{k+1}\right)$ とおいて，和と一般項の関係式を利用する．

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とするとき，

$$a_1=S_1\ ,\ \ a_n=S_n-S_{n-1}\ (n\geqq 2)\ \cdots\cdots①$$

が成り立つことは，よく知っていると思いますが，$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(a_k+\frac{1}{k+1}\right)$ とおくと，当然

$$a_1=S_1\ ,\ \ a_n=S_n-S_{n-1}\ (n\geqq 2)$$

ではありません．$\frac{1}{k}\left(a_k+\frac{1}{k+1}\right)$ が ① での a_n ですから，

$$\frac{1}{k}\left(a_k+\frac{1}{k+1}\right)=S_n-S_{n-1}\ (n\geqq 2)$$

となります．公式の意味をしっかりと理解していなければ使えないよい例です．

ポイント

和と一般項の関係は式の意味をよく理解して使いましょう！

♣ ♠

解答

（1）　$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(a_k+\frac{1}{k+1}\right)$ とおくと，$S_n=2^n+1-\frac{1}{n+1}$ より，

（i）　$n=1$ のとき，

$$S_1=2+1-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}\ \text{より，}\ a_1+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}\qquad\therefore\ a_1=2$$

（ii）　$n\geqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\left(a_n+\frac{1}{n+1}\right)&=S_n-S_{n-1}\\&=2^n+1-\frac{1}{n+1}-\left(2^{n-1}+1-\frac{1}{n}\right)\\&=2^{n-1}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}\end{aligned}$$

したがって，

$$a_n + \frac{1}{n+1} = n\cdot 2^{n-1} - \frac{n}{n+1} + 1 \iff a_n = n\cdot 2^{n-1}$$

$n=1$ のときは，$a_1 = 1\cdot 2^{1-1} = 1$ となるので，$n=1$ のときは成り立たない．よって，

$$\begin{cases} \boldsymbol{a_1 = 2} \\ \boldsymbol{a_n = n\cdot 2^{n-1}\ (n \geqq 2)} \end{cases} \cdots\cdots(\textbf{答})$$

(2)　$T_n = \sum_{k=1}^{n} a_n$ とおくと，

$$\begin{array}{rrl} & T_n = & 2 + 2\cdot 2^1 + 3\cdot 2^2 + 4\cdot 2^3 + \cdots\cdots + n\cdot 2^{n-1} \\ -) & 2T_n = & \quad 2\cdot 2^1 + 2\cdot 2^2 + 3\cdot 2^3 + \cdots\cdots + (n-1)\cdot 2^{n-1} + n\cdot 2^n \\ \hline & -T_n = & 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots\cdots + 2^{n-1} - n\cdot 2^n \end{array}$$

ゆえに，

$$\begin{aligned} -T_n &= \frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1} - n\cdot 2^n \\ T_n &= -2^n + 2 + n\cdot 2^n \\ &= \boldsymbol{(n-1)\cdot 2^n + 2}\cdots\cdots(\textbf{答}) \end{aligned}$$

◇　♡

解説

和と一般項に関する基本公式は，意味をきちんと理解していないと，誤った使い方をするので注意しましょうという問題です．$n \geqq 2$ でないと $a_n = S_n - S_{n-1}$ は定義できないので，場合分けをしなければいけません．(1) では $n=1$ のときと $n \geqq 2$ のときで場合分けをしますが，$n \geqq 2$ で求めた a_n は $n=1$ では成り立たないので，答えは別々に分けて書く必要が出てくる点に注意が必要です．また，(2) で和の計算をするときも，初項は 2 ですから，間違えないように計算しなければいけないので，注意力が試される問題であるといってもよいでしょう．

公式　**和と一般項の関係**

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とするとき，一般項 a_n と和 S_n について，次式が成り立つ．

$a_1 = S_1$，$a_n = S_n - S_{n-1}$　$(n \geqq 2)$