14　（オリジナル問題）　**【難易度】**…やや難

xy 平面上に点列 $\mathrm{P}_n(a_n, b_n)$ があり，点 P_n が 1 次変換 f によって移される点を $\mathrm{P}_{n+1}(a_{n+1}, b_{n+1})$ とする．f を表す行列を $A=\begin{pmatrix} 1 & h \\ k & 1 \end{pmatrix}$ とするとき，平面上の任意の点は $y=2x$ 上に移されるものとする．$\mathrm{P}_1(2, 0)$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1)　h, k の値を求めよ．

(2)　$n \geqq 2$ のとき，P_n の座標を求めよ．

(3)　2 点 $\mathrm{P}_i, \mathrm{P}_j$ の距離を $\overline{\mathrm{P}_i\mathrm{P}_j}$ と表すとき，$\displaystyle\sum_{i=2}^{2n-1} \overline{\mathrm{P}_i\mathrm{P}_{2n+1-i}}$ を求めよ．

【テーマ】：不動直線と和の計算

方針

(1) では，a, b が任意であることから，a, b に関しての恒等式を作る．(2) では (1) で求めた行列を用いて点を移動させるが，ここで連立漸化式が出てくるので，これを解かなければいけない．$a_{n+1}+b_{n+1}$ を計算すると等比数列型の漸化式になる．(3) の計算は非常に難しく感じるだろう．和の計算は，意味を捉えながら式変形をしないといけないことがよくあるので，本問の計算も式の意味をよく考えてみよう．必要なら和を書き下してみると方針が見えてくることがある．

前半は，1次変換をメインにして，後半は数列の計算をメインにしている．逆行列が存在しない1次変換では，

平面全体の点がある直線や点に，直線上の点がある点に

移動する．これは，逆行列が存在しないことからその逆変換が存在しないため 1 対 1 の対応にならないためである．本問で得られる行列も逆行列が存在しないタイプであることに注意したい．

ポイント

行列式が 0 となるときは 1 次変換は特殊になる．
和の計算は意味を捉えながら式変形する．

解答

(1)　平面上の任意の点を (a, b) とする．f によって移される先の点は，

$$\begin{pmatrix} 1 & h \\ k & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+hb \\ ak+b \end{pmatrix}$$

となり，これが $y=2x$ 上にあるためには，

$$ak+b=2(a+hb) \iff (2-k)a+(2h-1)b=0 \cdots\cdots ①$$

a, b は任意なので，これが a, b に関する恒等式となればよい．よって，① より，　☞ 解説 ❶

$$\boldsymbol{h=\frac{1}{2},\ k=2}\cdots\cdots\text{(答)}$$

(2) (1) より，$A=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ であるから，

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_n+\frac{1}{2}b_n \\ 2a_n+b_n \end{pmatrix}$$

したがって，

$$\begin{cases} a_{n+1} &= a_n+\frac{1}{2}b_n \quad \cdots\cdots② \\ b_{n+1} &= 2a_n+b_n \quad \cdots\cdots③ \end{cases}$$

である．② × 2 + ③ より，

$$2a_{n+1}+b_{n+1}=2(2a_n+b_n)$$

となるので，$a_1=2, b_1=0$ から，数列 $\{2a_n+b_n\}$ は初項 $2a_1+b_1=4$，公比 2 の等比数列となる．よって，

$$2a_n+b_n=4\cdot 2^{n-1}=2^{n+1}$$

$n \geqq 2$ のとき，$2a_n=b_n$ となるので，

$$4a_n=2^{n+1} \iff a_n=2^{n-1}\ ,\ b_n=2^n$$

ゆえに，点 P_n の座標は，

$$\mathbf{P}_{\boldsymbol{n}}\mathbf{(2^{\boldsymbol{n}-1},\ 2^{\boldsymbol{n}})} \quad \mathbf{(\boldsymbol{n} \geqq 2)}\cdots\cdots\text{(答)}$$

(3)

$$\begin{aligned}\text{(与式)} &= \overline{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_{2n-1}}+\overline{\mathrm{P}_3\mathrm{P}_{2n-2}}+\overline{\mathrm{P}_4\mathrm{P}_{2n-3}}+\cdots\cdots+\overline{\mathrm{P}_{2n-1}\mathrm{P}_2} \\ &= 2\sum_{i=2}^{n}\overline{\mathrm{P}_i\mathrm{P}_{2n+1-i}} \quad ☞ \boxed{\text{解説}}\ ❷\end{aligned}$$

ここで，$\mathrm{P}_i, \mathrm{P}_{2n+1-i}$ の x 座標はそれぞれ $2^{i-1}, 2^{2n-i}$ であり，$\mathrm{P}_i, \mathrm{P}_{2n+1-i}$ が直線 $y=2x$ 上にあることから， ☞ $\boxed{\text{解説}}$ ❸

$$\overline{\mathrm{P}_i\mathrm{P}_{2n+1-i}}=\sqrt{5}(2^{2n-i}-2^{i-1})$$

よって，求める和は次のようになる．

$$\begin{aligned}\sum_{i=2}^{2n-1}\overline{\mathrm{P}_i\mathrm{P}_{2n+1-i}} &= 2\sum_{i=2}^{n}\sqrt{5}(2^{2n-i}-2^{i-1}) \\ &= 2\sqrt{5}\sum_{i=2}^{n}(2^{2n-1}\cdot 2^{-(i-1)}-2^{i-1}) \\ &= 2\sqrt{5}\sum_{i=2}^{n}\left\{2^{2n-1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}-2^{i-1}\right\} \\ &= 2\sqrt{5}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left\{2^{2n-1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}-2^{i-1}\right\}-(2^{2n-1}-1)\right\} \\ &= 2\sqrt{5}\left\{2^{2n-1}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2^n-1}{2-1}-2^{2n-1}+1\right\} \\ &= 2\sqrt{5}\left\{2^{2n}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)-2^n+1-2^{2n-1}+1\right\} \\ &= 2\sqrt{5}(2^{2n}-2^n-2^n+1-2^{2n-1}+1) \\ &= 2\sqrt{5}(2^{2n-1}-2\cdot 2^n+2) \\ &= \sqrt{5}(2^{2n}-4\cdot 2^n+4) \\ &= \boldsymbol{\sqrt{5}(2^n-2)^2}\cdots\cdots\text{(答)}\end{aligned}$$

◊ ♡

解説

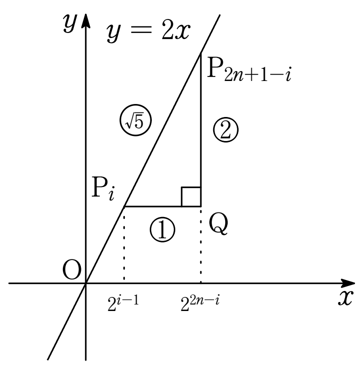
❶　平面上の任意の点を扱っているので，任意の (a, b) に関して ① が成り立つ必要がある．したがって，a, b に関する恒等式として係数比較を行う．
1 次変換には，様々なものがある．点から点・直線から直線・平面から平面へ移動するもの．さらには，直線から点・平面から直線・平面から点に移動するような変換もある．このような特殊な変換の場合は，行列式の値が 0 ($\Delta(A) = 0$) となる．なぜならば，その逆変換が存在しないから逆行列が存在しなくなるためである．本問の行列も逆行列が存在しないことに注意しておこう．

❷　(3) の和の計算は，意味をとらえて式変形をしないとかなり大変である．和を書き下すと，

$$\sum_{i=2}^{2n-1} \overline{\mathrm{P}_i\mathrm{P}_{2n+1-i}} = \overline{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_{2n-1}} + \overline{\mathrm{P}_3\mathrm{P}_{2n-2}} + \cdots + \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}} + \overline{\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{P}_n} + \cdots + \overline{\mathrm{P}_{2n-2}\mathrm{P}_3} + \overline{\mathrm{P}_{2n-1}\mathrm{P}_2}$$

となるので，同じものが 2 つずつある．したがって，真ん中まで加えておいて 2 倍すればよいので，解答のような式変形ができる．

❸　$\overline{\mathrm{P}_i\mathrm{P}_{2n+1-i}}$ の計算は次のように考える．
$n \geqq 2$ であれば，P_n は必ず直線 $y = 2x$ 上にあるから，線分比を利用することで，斜辺の長さを求めることができる．要は三角比を用いて計算するのである．
したがって，2 点 P_i, P_{2n+1-i} の x 座標の差を求めて $\sqrt{5}$ 倍すればよい．
この計算方法は必ずマスターしておこう．様々な場面で使えるはずである．



すなわち，$\overline{\mathrm{P}_i\mathrm{Q}} = 2^{2n-i} - 2^{i-1}$ より，

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{P}_i\mathrm{P}_{2n+1-i}} &= \sqrt{5}\,\overline{\mathrm{P}_i\mathrm{Q}} \\ &= \sqrt{5}(2^{2n-i} - 2^{i-1})\end{aligned}$$

となる．