12　('06　お茶の水女子大)　**【難易度】**… 標準

多項式 $f(x)$ を x^2+x+1 で割ると $x+2$ 余り，x^2+1 で割ると 1 余る．$f(x)$ を $(x^2+x+1)(x^2+1)$ で割ったときの余りを求めよ．

【テーマ】：整式の除法

方針

よく見かける余りの問題とは少し様子が違うことに気付いただろうか？基本的なやり方はこれまでと同様にすればいいのですが，$x^2+x+1=0$ や $x^2+1=0$ の解が計算しやすい形や実数でないというところをどのように生かすかがポイントです．

この問題を解く前に，次の基本問題が攻略できていなければいけません．

例題　多項式 $f(x)$ を $x+1$ で割ると 3 余り，x^2-4 で割ると $x+1$ 余る．$f(x)$ を $(x+1)(x^2-4)$ で割ったときの余りを求めよ．

解答

$$\begin{cases} f(x)=(x+1)Q_1(x)+3 \\ f(x)=(x^2-4)Q_2(x)+x+1 \end{cases}$$

とかけるので，$f(-1)=3,\ f(2)=3,\ f(-2)=-1$ である．

$$f(x)=(x+1)(x^2-4)Q_3(x)+ax^2+bx+c$$

より，

$$\begin{cases} f(-1)=a-b+c=3 \\ f(2)=4a+2b+c=3 \\ f(-2)=4a-2b+c=-1 \end{cases} \iff \begin{cases} a=-1 \\ b=1 \\ c=5 \end{cases}$$

よって，求める余りは，$\boldsymbol{-x^2+x+5}$**……(答)**

本問を解くためのベースになる問題ですから，必ず理解しておかなければいけません．この問題には，余りを工夫して設定する**別解**もありますから自分で調べておくとよいでしょう．

ポイント

割る整式の値が 0 となる $y=x$ の値を代入する
与えられた条件から求める余りの形を工夫する

♣　♠

解答

$f(x)$ を $x^2+x+1,\ x^2+1$ で割ったときの商をそれぞれ $Q_1(x),\ Q_2(x)$ とすると，

$$\begin{cases} f(x)=(x^2+x+1)Q_1(x)+x+2 & \cdots\cdots① \\ f(x)=(x^2+1)Q_2(x)+1 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

と表すことができる．次に，$f(x)$ を $(x^2+x+1)(x^2+1)$ で割ったときの商を $Q_3(x)$，余りを $R(x)$ とおくと，$R(x)$ は 3 次以下の整式であり，

$$f(x)=(x^2+x+1)(x^2+1)Q_3(x)+R(x)\ \cdots\cdots③$$

と表すことができる．ここで，①, ③ から $R(x)$ を x^2+x+1 で割った余りは $x+2$ に等しいので，

$$R(x)=(x^2+x+1)(ax+b)+x+2=ax^3+(a+b)x^2+(a+b+1)x+b+2 \cdots\cdots ④$$

となる．同様にすると，②, ③ から

$$R(x)=(x^2+1)(ax+c)+1=ax^3+cx^2+ax+c+1 \cdots\cdots ⑤$$

と表すことができる．④, ⑤ より，

$$\begin{cases} a+b=c \\ a+b+1=a \\ b+2=c+1 \end{cases} \iff \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=0 \end{cases}$$

であるから，求める余りは ⑤ より，$\boldsymbol{R(x)=x^3+x+1}$……(**答**)

別解

$f(x)$ を x^2+x+1, x^2+1 で割ったときの商をそれぞれ $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ とすると，

$$\begin{cases} f(x)=(x^2+x+1)Q_1(x)+x+2 & \cdots\cdots ① \\ f(x)=(x^2+1)Q_2(x)+1 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

と表すことができる．ここで，$x^2+x+1=0$ の 1 つの解を ω とすると，もう 1 つの解は ω^2 と表すことができて，さらに $\omega^3=1$, $\omega^2=-\omega-1$ をみたす．これを用いると ① より，

$$f(\omega)=\omega+2\ ,\ \ f(\omega^2)=\omega^2+2=-\omega+1 \cdots\cdots ③$$

を得る．また，② に $x=i, -i$ (i は虚数単位) をそれぞれ代入すると，

$$f(i)=1\ ,\ \ f(-i)=1 \cdots\cdots ④$$

を得る．

ここで，$f(x)$ を $(x^2+x+1)(x^2+1)$ で割った商を $Q_3(x)$，余りを ax^3+bx^2+cx+d とおくと，

$$f(x)=(x^2+x+1)(x^2+1)Q_3(x)+ax^3+bx^2+cx+d$$

と表される．$\omega^3=1$, $\omega^2=-\omega-1$, $i^2=-1$ を用いると，

$$\begin{cases} f(\omega)=a\omega^3+b\omega^2+c\omega+d=(c-b)\omega+a-b+d \\ f(\omega^2)=a\omega^6+b\omega^4+c\omega^2+d=(b-c)\omega+a-c+d \\ f(i)=ai^3+bi^2+ci+d=(c-a)i-b+d \\ f(-i)=a(-i)^3+b(-i)^2+c(-i)+d=(a-c)i-b+d \end{cases}$$

これらと ③, ④ から

$$(*)\begin{cases} (c-b)\omega+a-b+d=\omega+2 \\ (b-c)\omega+a-c+d=-\omega+1 \\ (c-a)i-b+d=1 \\ (a-c)i-b+d=1 \end{cases} \iff \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=1 \\ d=1 \end{cases}$$

以上より，求める余りは，$\boldsymbol{R(x)=x^3+x+1}$……(**答**)

◇ ♡

解説

解答 は余りを工夫して設定する方針をとっていて，別解 は割る整式の値が 0 となるような x の値を利用する方針です．別解 の方は，ω に関する知識がなければ思いつくことは困難でしょう！ 1 の虚立方根 ω に関する基礎知識をまとめておくので，知らなかった人，忘れていた人はもう一度復習しましょう．

参考

【1の虚立方根】

方程式 $x^3=1$ は，実数解を 1 つと複素数解を 2 つもつ．その複素数解を**1の虚立方根**といい，その 1 つを **ω**（オメガ）とする．（どちらを ω とおいても構わない．）実際にその解を求めると，

$$\begin{aligned} x^3=1 &\iff (x-1)(x^2+x+1)=0 \quad \cdots\cdots ① \\ &\iff x=1,\ \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2} \end{aligned}$$

すなわち，

$$\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \text{ と置いてもいいし，} \omega=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \text{ と置いても構わない．}$$

【ωの性質】

なぜどちらを ω と置いてもいいのか？それは次のような性質があるからである．

1の虚立方根の1つを ω とおくとき，もう一方の虚立方根は ω^2 である．

すなわち，1 の 3 乗根は，次の 3 つで表される．

1の3乗根

$$\boldsymbol{1\ ,\ \omega\ ,\ \omega^2}$$

さらに，ω には次の重要な関係式が成り立つ．

$$\boldsymbol{\omega^3=1\ ,\ \omega^2+\omega+1=0}$$

上記の式がなぜ成り立つのか？それは，ω は ① の解だからです．
複素数 z の共役複素数を $\overline{z}$ とすれば，次の式も成り立つことがわかります．

$$\boldsymbol{\omega^2=\overline{\omega}\ ,\ \overline{\omega}^2+\overline{\omega}+1=0}$$

ω に関する基本事項は，ここに挙げているもので全てなので，ここにある式をしっかりと覚えて活用できるようにしておきましょう．

また，別解 の (*) の部分は，次の事実を利用しています．

$$a,b,c,d \text{ が実数，} z \text{ が複素数であるとき，} az+b=cz+d \iff a=c,\ b=d$$

このように，入試問題は様々な分野の知識が必要となりますから，万遍なく学習することが必要です．