11 （オリジナル問題）　【難易度】… 標準

次の関係式をみたす関数 $f(x)$ がある．

$$\int_0^x f(t)\,dt = f(x)+1+\int_{-x}^x f(t)\,dt$$

(1)　$f(0),\ f'(0)$ の値を求めよ．

(2)　$a,\ b$ を実数とし，$f(x)$ が $f(x)=e^x(a\sin x+b\cos x)$ の形で与えられるとき，$a,\ b$ の値を求めよ．

(3)　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos x\,dx+1$ を示せ．

(4)　$f(x)$ が (2) で定めた関数のとき，不等式

$$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\ ,\ y\geqq -1\ ,\ y\leqq f(x)$$

によって表される領域を D とする．D の面積 S を求めよ．

【テーマ】：積分方程式

方針

(1) は関数方程式などでもよく出題される問題で，$x=0$ を与式に代入すればよい．(2) は関数方程式をみたす関数 $f(x)$ を求める問題で，(1) を用いればよい．(3) は部分積分を用いる．(4) は (3) をどのように活かすかがポイントである．

(2) は $f(x)$ を与式に代入すると計算が非常に大変になります．未知数が 2 つあるので式が 2 つ必要であるということに気がつけば (1) が使えるのでは？と思いつくでしょう！ (3) は (4) の計算を和らげるための誘導問題です．$e^x\sin x$ や $e^x\cos x$ は部分積分を何度か繰り返せば同じ形が出てくるというのは常識として知っておきましょう．(3) のおかげで (4) の計算はそれほど難解にはなりません．誘導がなくても自分で気付けるようにしておきたいものです．

ポイント

積分方程式は適切な値を代入！

♣　♠

解答

(1)　与えられた式に $x=0$ を代入すると，

$$\int_0^0 f(t)\,dt=f(0)+1+\int_0^0 f(t)\,dt\quad \therefore\ \boldsymbol{f(0)=-1}\cdots\cdots(\text{答})$$

次に，与えられた式の両辺を x で微分すると，　☞ 公式

$$f(x)=f'(x)+f(x)-f(-x)\cdot(-1)\quad\Longleftrightarrow\quad f'(x)=-f(-x)$$

この式に，$x=0$ を代入して，

$$f'(0)=-f(0)=1\quad\therefore\ \boldsymbol{f'(0)=1}\cdots\cdots(\text{答})$$

(2)

$$f'(x)=e^x(a\sin x+b\cos x)+e^x(a\cos x-b\sin x)=e^x\{(a-b)\sin x+(a+b)\cos x\}$$

であり，

$$f(0)=b,\ f'(0)=a+b$$

であるから，(1) の結果より，

$$\begin{cases} b=-1 \\ a+b=1 \end{cases} \iff \begin{cases} \boldsymbol{a=2} \\ \boldsymbol{b=-1} \end{cases} \cdots\cdots(\textbf{答})$$

(3) **【証明】**

部分積分法で計算すると，

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\,dx &= \Big[e^x(-\cos x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\,dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\,dx + 1\end{aligned}$$

よって，示された. **(証明終)**……**(答)**

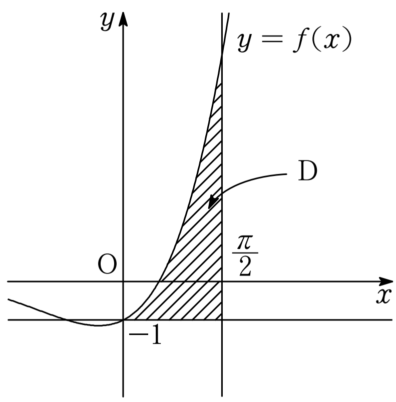
(4) (2) より，

$$f(x)=e^x(2\sin x-\cos x),\ f'(x)=e^x(3\sin x+\cos x)$$

であるから，$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ で $f'(x)>0$ となるので，$y=f(x)$ はこの区間で単調増加である.

よって，領域 D を図示すると図の斜線部分（境界線上の点を含む）となる．したがって，求める面積 S は,

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{f(x)-(-1)\}\,dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{e^x(2\sin x-\cos x)+1\}\,dx \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin x\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos x\,dx + \frac{\pi}{2} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos x\,dx + 2 + \frac{\pi}{2} \quad (\because\ (3)) \end{aligned}$$



で表される．ここで，$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\,dx$ とおくと,

$$\begin{aligned} I &= \Big[e^x\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x(-\sin x)\,dx \\ &= -1+\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin x\,dx \\ &= -1+\Big[e^x\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos x\,dx \\ &= -1+e^{\frac{\pi}{2}}-I \end{aligned}$$

したがって,

$$2I=e^{\frac{\pi}{2}}-1 \iff I=\frac{e^{\frac{\pi}{2}}-1}{2}$$

ゆえに，求める面積 S は,

$$S=\frac{e^{\frac{\pi}{2}}-1}{2}+2+\frac{\pi}{2} \iff \boldsymbol{S=\frac{e^{\frac{\pi}{2}}+\pi+3}{2}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

◇ ♡

公式 **【微分と積分の関係】**

a を定数．x は t に無関係な変数．$f(x)$, $g(x)$ は連続で微分可能な関数とする．

$$\text{(i)}\quad \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

$$\text{(ii)}\quad \frac{d}{dx}\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt = f(g(x))g'(x) - f(h(x))h'(x)$$

解説

(4) での計算は基本的な面積計算ですが，その計算途中に $\displaystyle\int e^x \sin x\,dx$ と $\displaystyle\int e^x \cos x\,dx$ が出てきます．もちろんそれぞれの積分計算はやったことがあるはずですが，それを一つ一つ計算しているのでは大変です．ですから (3) の設問を設けました．このような関係式は結果を覚えておく必要は無いですが，この 2 つの積分には何らかの関係があるということを経験的に知って置いてもらいたいのです．このような関係は日頃の計算演習を通して学んでいくしかありませんから，そのような意識を持ちつつ学習を進めてください．