10 （オリジナル問題）　**【難易度】**… 標準

数列 $\{a_n\}$ を次のように定義する．

$$a_n=\int_{-\pi}^{\pi}(\sin^n x+\cos^n x)\,dx$$

このとき，次の各問いに答えよ．

（1）　a_1, a_2 を求めよ．

（2）　n が奇数のとき，$a_n=0$ となることを示せ．

（3）　n が偶数のとき，a_n と a_{n-2} の関係式を求めよ．

（4）　a_{10} を求めよ．

【テーマ】：積分漸化式

方針

(1) は単純な計算問題であるから完答すべき問題．(2) は奇関数の性質を用いれば容易に解答できる．(3) は，積分漸化式を求めるという本問の核となる問題．積分漸化式は部分積分で求めることが多い．(4) は (3) を用いて順に計算していけばよい．

積分漸化式を求める問題は多種多様にあるが，よく出てくるものでいえば，次のようなものがあげられます．

（i）　$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$　☞　$a_n=\dfrac{n-1}{n}a_{n-2}$　　（ii）　$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx$　☞　$a_n=\dfrac{n-1}{n}a_{n-2}$

（iii）　$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,dx$　☞　$a_n=\dfrac{1}{n-1}-a_{n-2}$　　（iv）　$a_n=\int_1^{e}(\log x)^n\,dx$　☞　$a_n=e-na_{n-1}$

ちなみに，これらの結果を覚えておいても仕方がありません．なぜなら積分区間が変わると微妙に結果が変わってくるからです．それよりもその導出過程をしっかりと練習しておいてください．（上記の４つは自分で計算して確かめて下さい．）中には少々難しい式変形をしなければいけないものもあります．積分漸化式の問題は，大抵が本問のように誘導されていますが，中にはいきなり『 a_{10} を求めよ．』なんて問題もありますから慣れておく必要があるのです．

ポイント

積分漸化式は部分積分法を利用

♣　♠

解答

(1)

$$\begin{aligned}a_1&=\int_{-\pi}^{\pi}(\sin x+\cos x)\,dx\\&=2\int_0^{\pi}\cos x\,dx\\&=2\Big[\sin x\Big]_0^{\pi}\\&=\mathbf{0}\cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_2&=\int_{-\pi}^{\pi}(\sin^2 x+\cos^2 x)\,dx\\&=2\int_0^{\pi}dx\\&=2\Big[x\Big]_0^{\pi}\\&=\mathbf{2\pi}\cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

(2) **【証明】**

n が奇数のとき，$f(x)=\sin^n x$ とおくと，

$$f(-x)=\sin^n(-x)=(-\sin x)^n=-\sin^n x=-f(x)$$

となるので，$y=f(x)$ は奇関数であり，同様にすると，$y=\cos^n x$ は偶関数であることが示されるので，

$$a_n=2\int_0^{\pi}\cos^n x\,dx$$

となる．ここで，$x-\dfrac{\pi}{2}=t$ とおくと，$dx=dt$ であり，

x	$0\ \to\ \pi$
t	$-\dfrac{\pi}{2}\ \to\ \dfrac{\pi}{2}$

より，

$$\begin{aligned} a_n &= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\left(t+\frac{\pi}{2}\right)dt \\ &= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(-\sin t)^n\,dt \\ &= -2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\,dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

よって，題意は示された． **(証明終)**……**(答)**

(3) n が偶数のとき，$y=\sin^n x+\cos^n x$ は偶関数となるので，

$$\begin{aligned} a_n &= 2\int_0^{\pi}(\sin^n x+\cos^n x)\,dx \\ &= 2\int_0^{\pi}(\sin x\sin^{n-1}x+\cos x\cos^{n-1}x)\,dx \\ &= 2\Big[-\cos x\sin^{n-1}x+\sin x\cos^{n-1}x\Big]_0^{\pi} \\ &\qquad -2\int_0^{\pi}\left\{-(n-1)\cos^2 x\sin^{n-2}x-(n-1)\sin^2 x\cos^{n-2}x\right\}dx \\ &= 2(n-1)\int_0^{\pi}\left\{(1-\sin^2 x)\sin^{n-2}x+(1-\cos^2 x)\cos^{n-2}x\right\}dx \\ &= 2(n-1)\int_0^{\pi}(\sin^{n-2}x+\cos^{n-2}x)\,dx-2(n-1)\int_0^{\pi}(\sin^n x+\cos^n x)\,dx \\ &= (n-1)a_{n-2}-(n-1)a_n \end{aligned}$$

ゆえに，$na_n=(n-1)a_{n-2}$ となるので，$\boldsymbol{a_n=\dfrac{n-1}{n}a_{n-2}}$……**(答)**

(4) (1), (3) の結果より

$$\begin{aligned} a_{10} &= \frac{9}{10}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot a_2 \\ &= \frac{9}{10}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot 2\pi \\ &= \boldsymbol{\frac{63}{64}\pi}\text{……(答)} \end{aligned}$$

◇ ♡

解説

(2) では，偶関数と奇関数の性質を用いている．積分区間に注意して，いつでもこれが使えるような練習を積んでおきましょう．

【偶関数と奇関数の定積分】

偶関数や奇関数の定積分は積分区間が 0 に関して対称であれば，計算を楽に進めることができるので，絶対に知っておきたい．

$f(x)$ を奇関数，$g(x)$ を偶関数とする．a を正の定数とするとき，次式が成り立つ．

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$
$$\int_{-a}^{a} g(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} g(x)\,dx$$

この公式は，積分区間の両端の値が**符号が逆で絶対値が等しい**ときでないと使えない．実際に具体的な関数を用いて面積で考えれば，公式の意味が理解できるだろう．

参考

(4) では a_n を求めることまでは問うてないが，実は (3) で求めた漸化式から a_n を求めることができる．式変形がちょっと難しいが，参考までに次のような式変形の仕方も知っておいてもらいたい．

$n=2m$ のとき，(3) で得られた漸化式から，

$$\begin{aligned} a_{2m} &= \frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdots\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot a_2 \\ &= \frac{(2m)(2m-1)(2m-2)(2m-3)\cdots 4\cdot 3}{\{(2m)(2m-2)(2m-4)\cdots 6\cdot 4\}^2}\cdot 2\pi \\ &= \frac{\frac{(2m)!}{2\cdot 1}}{\{2^{m-1}m(m-1)(m-2)\cdots 3\cdot 2\}^2}\cdot 2\pi \\ &= \frac{(2m)!}{2^{2m-2}\{m(m-1)(m-2)\cdots 3\cdot 2\}^2}\pi \\ &= \frac{(2m)!}{2^{2m-2}(m!)^2}\pi \end{aligned}$$

となるので，$m=\dfrac{n}{2}$ であることから，

$$a_n = \frac{n!}{2^{n-2}\left(\frac{n}{2}!\right)^2}\pi$$

ゆえに，これと (2) の結果から，

$$\begin{cases} \boldsymbol{n} \textbf{ が奇数のとき，} \quad \boldsymbol{a_n = 0} \\ \boldsymbol{n} \textbf{ が偶数のとき，} \quad \boldsymbol{a_n = \dfrac{n!}{2^{n-2}\left(\frac{n}{2}!\right)^2}\pi} \end{cases} \quad \cdots\cdots(\textbf{答})$$

となるのである．これを用いても (4) は解答することができる．

$$a_{10} = \frac{10!}{2^8\cdot(5!)^2}\pi = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{2^8\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\pi = \boldsymbol{\frac{63}{64}\pi}\cdots\cdots(\textbf{答})$$