整数問題【初級編】

整数問題は，高等学校の教科書では学習しません．しかしながら，大学入試では頻出と言ってもよい分野です．では，なぜ高等学校の教科書で扱われないのに，大学入試で出題されるのでしょうか？大学入試で出題される整数問題は，他の分野に比べて公式や定理を利用して解くことがほとんどありません．つまり改めて学習することがほとんどないから高等学校の教科書では扱われていないのでしょう．それならどうして大学入試には出題されるのでしょう？整数問題は，様々なアイデアや技巧的な計算が要求されるため，知識だけではなく発想力などが必要だからでしょう．そのため，整数問題は難問になってしまうことが多々あります．しかし，基本的な問題も当然あるのでそこは必ず得点できるようにしておかなければなりません．ここでは，整数問題の基礎を**【初級編】**で，大学入試では知っておきたい知識や解法を**【中級編】**で解説していくことにします．

よく出題される整数問題は，大きく分けると次のタイプに分類できます．

❶ 素因数分解型

❷ 因数分解型

❸ 絞り込み型

❹ 倍数・素数型（証明が主要）

❺ 剰余型

【初級編】では，これらを一通り例題を交えながら説明していきます．

❶ 素因数分解型

素因数分解は中学校で学習することですから，この問題は記号の意味さえ理解できれば，中学生でも解くことができます．

例題 **類題演習** ☞ p.11

20! を素因数分解すると，次のようになった．

$$20! = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$$

このとき，a, b, c の値を求めよ．ただし，n を自然数とするとき，$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$ とする．

この問題は，1〜20 まで全部書き出してしまえば解くことができます．しかし，それではこの問題を発展させた問題を解くことができなくなってしまいます．汎用性のある解答を考えてみましょう．

♣ ♠

解答 と **解説**

$20! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots\cdots \cdot 19 \cdot 20$ である．まず，素因数 2 の数を数える．●を素因数 2 の個数とすると，

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	●		●		●		●		●		●		●		●		●		●
			●				●				●				●				●
							●								●				
															●				

これより，●の数が a の値と一致するので，$\boldsymbol{a = 18}$……（**答**）

 © 大学受験・数学塾　管理人：makoto

同様に，▲を素因数 3 の個数とすると，

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
		▲			▲			▲			▲			▲			▲		
								▲									▲		

これより，▲の数が b の値と一致するので，$\boldsymbol{b=8}$……(**答**)

■を素因数 5 の個数とすると，

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
				■					■					■					■

これより，■の数が c の値と一致するので，$\boldsymbol{c=4}$……(**答**)

◇ ♡

さて，この方法でどのように一般化すればよいのでしょうか．注目してもらいたいのは，●や▲や■がでてくる規則です．素因数 2 について見てみましょう．1 段目の●は 2 の倍数のところに，2 段目の●は 4 の倍数のところに，3 段目の●は 8 のところに … と考えていくと，n 段目の●は 2^n のところに現れるということになります．これを発見すると，数が少し大きくなっても素因数 2 の個数を見つけることができるのです．

2 因数分解型

例題 　　類題演習 ☞ p.11

x, y を整数とする．次の方程式をみたす x, y の組をすべて求めよ．

(1) $(x+1)(y-2)=3$

(2) $xy+2x-3y+2=0$

(3) $x^2-3xy+2y^2-6=0$

通常変数が 2 つあれば，式が 2 つなければ x, y の値を特定することはできませんが，その変数が整数であれば，式が 1 つであっても x, y の値を特定することができます．（一意に定まるとは限りません．）このような方程式を**不定方程式**といいます．この不定方程式の解法は，大学入試では必須項目です．

♣ ♠

解答 と **解説**

(1) $x+1, y-2$ はともに整数であるから，かけて 3 となる組合せは，次の通りである．

$x+1$	-3	-1	1	3
$y-2$	-1	-3	3	1

上段に -1，下段に 2 を加えると，

x	-4	-2	0	2
y	1	-1	5	3

ゆえに，求める整数解は，

$$\boldsymbol{(x, y)=(-4, 1), (-2, -1), (0, 5), (2, 3)}\text{……(答)}$$

Ⓒ 大学受験・数学塾　管理人：makoto

(2)　$xy+2x-3y+2=0 \iff (x-3)(y+2)=-8$ ☞ 解説

$x-3,\ y+2$ はともに整数であるから，かけて -8 となる組合せは，次の通りである．

$x-3$	-8	-4	-2	-1	1	2	4	8
$y+2$	1	2	4	8	-8	-4	-2	-1

上段に 3，下段に -2 を加えると，

x	-5	-1	1	2	4	5	7	11
y	-1	0	2	6	-10	-6	-4	-3

ゆえに，求める整数解は，

$$\boldsymbol{(x,y)=(-5,-1),(-1,0),(1,2),(2,6),(4,-10),(5,-6),(7,-4),(11,-3)}\cdots\cdots\textbf{(答)}$$

解説

不定方程式を解くときの最も基本的な方法は，式の形を

(整数)×(整数)＝(整数)

とすることです．(1) ではこのような形になっていたのですが，(2) ではなっていません．まずは，この形に変形する必要があります．

$x,\ y$ の 2 変数がともに 1 次式で与えられているような場合は，次の手順で変形していきます．

（i）　xy という項に注目して，$(x-○)(y-△)=□$ とします．

（ii）　x の係数に注目して，△の値を決定します．$(x-○)(y+2)=□$

（iii）　y の係数に注目して，○の値を決定します．$(x-3)(y+2)=□$

（iv）　最後に定数項に注目して，□の値を決定します．$(x-3)(y+2)=-8$

慣れてしまえば難しくありませんから，まずはこの変形が確実にできるようにしましょう．

(3)　$x^2-3xy+2y^2-6=0 \iff (x-2y)(x-y)=6$

$x-2y,\ x-y$ はともに整数であるから，かけて 6 となる組合せは，次の通りである．

$x-2y$	-6	-3	-2	-1	1	2	3	6
$x-y$	-1	-2	-3	-6	6	3	2	1

上段に -1 をかけて，下段に加えると，

$x-2y$	-6	-3	-2	-1	1	2	3	6
y	5	1	-1	-5	5	1	-1	-5

下段に 2 をかけて，上段に加えると，

x	4	-1	-4	-11	11	4	1	-4
y	5	1	-1	-5	5	1	-1	-5

ゆえに，求める整数解は，

$$\boldsymbol{(x,y)=(4,5),(-1,1),(-4,-1),(-11,-5),(11,5),(4,1),(1,-1),(-4,-5)}\cdots\cdots\textbf{(答)}$$

解説

このタイプも因数分解を行いますが，$x^2,\ xy,\ y^2$ があるので，この部分だけに着目して因数分解します．したがって，いつも因数分解ができるとは限りません．(因数分解できないタイプは少々難しいので，初級編では割愛します.)

© 大学受験・数学塾　管理人：makoto

3 絞り込み型

与えられた式から，整数値を絞り込んで，あとはしらみつぶしに探す方法が最も基本的な解法になります．

例題

類題演習 ☞ p.11

次の各問いに答えよ．

(1) $\dfrac{n^2+17n-29}{n-5}$ の値が自然数となるような整数 n の値をすべて求めよ．

(2) $x+y+z^2=13$ をみたす自然数 x, y, z の組は全部で何通りあるか．

(3) x, y を $x \leqq y$ をみたす自然数とする．$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{5}$ をみたす x, y の組をすべて求めよ．

絞り込みの方法は，与えられた条件が少ない上に様々な解法があるので，式変形のテクニックや方法が重要なポイントになります．経験していないと難しいのが特徴です．

♣ ♠

解答 と **解説**

(1) $n^2+17n-29=(n-5)(n+22)+81$ と表されるので，

$$\frac{n^2+17n-29}{n-5}=\frac{(n-5)(n+22)-81}{n-5}=n+22+\frac{81}{n-5}$$

よって，$n-5$ が 81 の約数であればよい．

$n-5=1, 3, 9, 27, 81$ のときは，$n=6, 8, 14, 32, 86$ となり，題意をみたす．

(ｉ) $n-5=-1$ のとき，$n=4$ でこのとき，

(与式) $=26-81<0$ となり，題意に反するので不適．

(ii) $n-5=-3$ のとき，$n=2$ でこのとき，

(与式) $=24-27<0$ となり，題意に反するので不適．

(iii) $n-5=-9$ のとき，$n=-4$ でこのとき，

(与式) $=18-9>0$ となり，題意をみたす．

(iv) $n-5=-27, -81$ のときは，明らかに (与式) <0 となり，題意に反するので不適．

ゆえに，求める n の値は，

$$\boldsymbol{n=-4, 6, 8, 14, 32, 86}\cdots\cdots\textbf{(答)}$$

解説

整式の除法を用いて，$n^2+17n-29=(n-5)(n+22)+81$ とし，さらに与式を

$$n+22+\frac{81}{n-5}$$

の形に変形するのが一番のポイントです．こうすることで，$n+22$ は整数なので $\dfrac{81}{n-5}$ だけを考えることができ，しかも分子が定数になっているので，これが整数になる条件は絞られるのです．あとは，条件をみたすように n を一つ一つ調べていけばよいのですが，与えられた式が**自然数**になるということを忘れないように調べましょう．整数問題は，与えられた条件をみたす**整数**を求めるのか, **自然数（正の整数）**を求めるのかを明確にしておかなければいけません．

Ⓒ 大学受験・数学塾　管理人：makoto

(2)　$z^2 = 13 - (x + y) \leqq 13 - 2 = 11$ であるから，z のとり得る値は，$z = 1, 2, 3$ である．

（ i ）　$z = 1$ のとき，

$x + y = 12$ より，$(x, y) = (1, 11), (2, 10), \cdots, (11, 1)$ の 11 組

（ii）　$z = 2$ のとき，

$x + y = 9$ より，$(x, y) = (1, 8), (2, 7), \cdots, (8, 1)$ の 8 組

（iii）　$z = 3$ のとき，

$x + y = 4$ より，$(x, y) = (1, 3), (2, 2), (3, 1)$ の 3 組

ゆえに，求める組数は，

$11 + 8 + 3 =$ **22(通り)**……(**答**)

解説

z の値を絞らないと大変な場合分けをしなくてはならなくなります．解答をみると簡単に思えるかもしれませんが，初めて挑むと何から手をつけてよいかわからないのが現状でしょう．このような問題では，

$$z^2 > 0,\ x \geqq 1,\ y \geqq 1$$

という隠れた条件を利用しています．このように，整数問題では，隠れた条件式を見つけ出して利用することが多々あります．特に，絞り込みの場合は $z^2 > 0$ のような条件は頻繁に使います．

(3)　$x \leqq y$ より，$\dfrac{1}{x} \geqq \dfrac{1}{y}$ であるから，

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x} \geqq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5} \iff \frac{2}{x} \geqq \frac{1}{5} \iff x \leqq 10$$

また，$\dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{x} > 0$ であるから，$x > 5$ である．したがって，$6 \leqq x \leqq 10$ である．

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{5} - \frac{1}{x} = \frac{x-5}{5x} \iff y = \frac{5x}{x-5} \quad \cdots\cdots ①$$

よって，$x = 6, 7, 8, 9, 10$ の値に対して，① から y の値を求めると，次のようになる．

x	6	7	8	9	10
y	30	$\frac{35}{2}$	$\frac{40}{3}$	$\frac{45}{4}$	10

x, y は自然数であるから，$\boldsymbol{(x, y) = (6, 30), (10, 10)}$……(**答**)

解説

$x \leqq y$ という条件から，不等式を作って絞り込みを行います．その際，$x \leqq 10$ と出てくるので，$x = 1, 2, \cdots, 10$ を調べることになりますが，y が自然数であるという条件から，$x > 5$ となるので，$x = 1, 2, 3, 4, 5$ は調べる必要がなくなります．このように，調べる場合が多いときは，上から絞り込むだけでなく下から絞り込む方法も有効です．これは，ある程度経験を積まないと難しいと思うので，たくさんの演習を通して身に付けてください．
ちなみに，両辺に $5xy$ をかけると不定方程式になるので，因数分解を利用する方法でも解くことができます．

© 大学受験・数学塾　管理人：makoto

4 倍数・素数型

整数 n に対して，ある整式がある数の倍数になることを証明する問題が多く，経験したことがある人が多いと思います．

例題 類題演習 ☞ p.11

n を自然数とする．次の各問いに答えよ．

(1) $2n^3-3n^2+n$ が 6 の倍数であることを示せ．

(2) n^5-n は 30 の倍数であることを示せ．

(3) 2^n-1 が素数ならば n も素数であることを対偶を用いて示せ．

ある整数が 2, 3, 4, ⋯, の倍数であることを見分ける方法を知っていなければ話になりません．有名なのは 3 の倍数・9 の倍数の判定法ですが，それ以外にも一通りあげておきましょう．

【倍数の判定法】

2, 5, 10 に関してはすぐにわかると思いますので，3, 4, 6, 8, 9, 12 は必ず覚えておきましょう．

2 の倍数 …… 偶数
3 の倍数 …… 各位の和が 3 の倍数
4 の倍数 …… 下 2 桁が 4 の倍数
5 の倍数 …… 下 1 桁が 0 か 5
6 の倍数 …… 2 かつ 3 の倍数
8 の倍数 …… 下 3 桁が 8 の倍数
9 の倍数 …… 各位の和が 9 の倍数
10 の倍数 …… 下 1 桁が 0
12 の倍数 …… 3 かつ 4 の倍数

また，いくつかの整数の積がある数の倍数であるという判定方法もあります．

【隣接 k 整数の積】

隣接する k 個の整数の積は，$k!=1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdots\cdot k$ の倍数である．

では，これらの基本事項を用いて **例題** を解いてみましょう．

♣ ♠

解答 と **解説**

(1) **【証明】**

$2n^3-3n^2+n=n(2n-1)(n-1)$ であるから，与えられた数は隣接する 2 つの整数の積を含んでいるので，2 の倍数である．よって，3 の倍数であることを示せばよい．k を自然数とする．

(i) $n=3k$ のとき，

$$n(2n-1)(n-1)=3k(6k-1)(3k-1)$$

となるので，3 の倍数である．

(ii) $n=3k-1$ のとき，

$$n(2n-1)(n-1)=(3k-1)(6k-3)(3k-2)=3(3k-1)(2k-1)(3k-2)$$

となるので，3 の倍数である．

(iii) $n=3k-2$ のとき，

$$n(2n-1)(n-1)=(3k-2)(6k-5)(3k-3)=3(3k-2)(6k-5)(k-1)$$

となるので，3 の倍数である．

ゆえに，$2n^3-3n^2+n$ は 2 かつ 3 の倍数であるから，6 の倍数であることが示された．　**(証明終)……(答)**

 Ⓒ 大学受験・数学塾　管理人：makoto

解説

$n(n-1)$ という形から隣接する 2 つの整数の積であることを見抜かなければいけません．$n(n+1)$ という形でよく出てきますが，その他の形でも隣接する 2 つあるいは 3 つの整数の積であることを見つけられるようにしておきましょう．
また，3 の倍数であることを示す方法は，様々ですが本問のように式からすぐに示せない場合は，場合分けをしなければいけません．これも最頻出の証明方法なので必ずできるようになっておきましょう．さらに，注意したいのは，n が自然数なので，k を整数にしてはいけないことと，$n=3k,\ 3k+1,\ 3k+2$ と場合分けしてはいけないことです．k を自然数としたとき，この場合分けでは，$n=1,\ 2$ が網羅されていません．したがって，解答 のように n を分けなければならないのです．

（2）**【証明】**

$$\begin{aligned} n^5-n &= n(n^4-1) \\ &= n(n^2-1)(n^2+1) \\ &= n(n-1)(n+1)(n^2-4+5) \\ &= n(n-1)(n+1)(n^2-4)+5n(n-1)(n+1) \\ &= n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2)+5n(n-1)(n+1) \end{aligned}$$

となる．$n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2)$ は隣接する 5 つの整数の積であるから，$5!=120$ の倍数であり，$5n(n-1)(n+1)$ は $n(n-1)(n+1)$ が隣接する 3 つの整数の積であることから $5\times 3!=30$ の倍数である．
よって，n^5-n は 30 の倍数であることが示された．　　**(証明終)**……**(答)**

解説

式変形が難しく一度経験していなければなかなか思いつかないかもしれません．しかし，この式変形が思いつかなくても 30 の倍数であることを示すには，2 かつ 3 かつ 5 の倍数であることを示せばよいということには気付かなければいけません．$n^5-n=n(n-1)(n+1)(n^2+1)$ まで因数分解できれば，隣接する 3 つの整数の積を含んでいるので，$3!=6$ の倍数であることがわかりますから，あとは 5 の倍数であることを示せばよいだけです．
5 の倍数であることを示すためには，(1) のような場合分けを行って証明すればよいのです．

（3）**【証明】**

$n=1$ のとき，$2-1=1$ となるので，$n\geqq 2$ で考える．
「2^n-1 が素数ならば n も素数である」の対偶は，「n が合成数ならば 2^n-1 も合成数である」である．n を合成数とし，$n=pq$（$p,\ q$ はともに 1 より大きい整数）とすると，

$$\begin{aligned} 2^n-1 &= 2^{pq}-1 \\ &= (2^q)^p-1 \\ &= (2^q-1)\{(2^q)^{p-1}+(2^q)^{p-2}+\cdots\cdots+1\} \end{aligned}$$

となる．$q>1$ より，$2^q-1>1,\ (2^q)^{p-1}+(2^q)^{p-2}+\cdots\cdots+1>1$ となるので，2^n-1 は合成数である．
したがって，2^n-1 が素数ならば n も素数であることが示された．　　**(証明終)**……**(答)**

解説

この問題を解くにあたって，必要な予備知識が 2 つあります．1 つめは，自然数の分類です．自然数を分類する方法は色々あります．例を挙げると，

$$\begin{cases} \text{奇数} \\ \text{偶数} \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 \\ \text{素数} \\ \text{合成数} \end{cases} \qquad \begin{cases} 3\ \text{で割り切れる数} \\ 3\ \text{で割ると}\ 1\ \text{余る数} \\ 3\ \text{で割ると}\ 2\ \text{余る数} \end{cases}$$

Ⓒ 大学受験・数学塾　管理人：makoto

等です．ここで，**合成数**という言葉を始めて聞く人もいるかもしれませんが，合成数はいくつかの素数の積で表される数のことです．したがって，自然数は 1 と素数と合成数から成り立っています．この分類方法を知らなければ，解答は困難です．
2 つめは，次の因数分解の公式です．

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$$
$$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots\cdots-ab^{n-2}+b^{n-1})\quad (n：奇数)$$

a^n+b^n は n が偶数のとき，必ず因数分解できるとは限りません．

5 剰余型

余りに関する問題も頻出事項です．しかしながら，余りに関する基本的な知識を身につけていれば，対処できる場合が多く，対策できているかどうかが重要になる問題が多くあります．

例題 **類題演習** ☞ p.11

次の各問いに答えよ．

（1） 3^{15} を 10 で割った余りを求めよ．

（2） 100^{100} を 7 で割った余りを求めよ．

（3） n を自然数とするとき，$9^{2n}+4^{2n}$ を 5 で割った余りは 2 であることを示せ．

余りを求める問題は，非常に重要です．余りの仕組みが理解できれば，それほど難しいものではありません．まずは，予備知識なしで解ける方法を解説します．

♣ ♠

解答 と **解説**

（1） 3^{15} を 10 で割った余りを求めるということは，3^{15} の 1 の位の数を求めることと同値である．ここで，$f(n)$ が整数 n の 1 の位を表すものとすると，

$$f(3)=3,\ f(3^2)=9,\ f(3^3)=7,\ f(3^4)=1,\ f(3^5)=3,\ \cdots$$

となるので，k を自然数とするとき，

$$f(3^{4k-3})=3,\ f(3^{4k-2})=9,\ f(3^{4k-1})=7,\ f(3^{4k})=1$$

である．$15=4\cdot4-1$ であるから，$f(3^{15})=7$ となる．ゆえに，3^{15} を 10 で割った余りは，**7**……(**答**)

解説

1 の位が求めたければ，1 の位だけに着目すれば十分である．したがって，他の位を考えることがないので，このような解法をとることができる．しかし，書き方が難しいので，解答をかくには練習が必要でしょう．
この問題は，**【中級編】**で解説する**合同式**を用いるとあっさり解くことができます．

（2） a,b,n を自然数とするとき，

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= {}_n\mathrm{C}_0a^n+{}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b+{}_n\mathrm{C}_2a^{n-2}b^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}ab^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_nb^n\\ &= a({}_n\mathrm{C}_0a^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_1a^{n-2}b+{}_n\mathrm{C}_2a^{n-3}b^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}b^{n-1})+{}_n\mathrm{C}_nb^n\ \cdots\cdots①\end{aligned}$$

であるから，$a=98,\ b=2,\ n=100$ とすると，

$$(98+2)^{100}=98({}_{100}\mathrm{C}_0 98^{99}+{}_{100}\mathrm{C}_1 98^{98}2+{}_{100}\mathrm{C}_2 98^{97}2^2+\cdots\cdots+{}_{100}\mathrm{C}_{99}2^{99})+{}_{100}\mathrm{C}_{100}2^{100}$$

Ⓒ 大学受験・数学塾　管理人：makoto

であるから，100^{100} を 7 で割った余りは，2^{100} を 7 で割ったあまりと等しい．

$$2^{100}=2\cdot 2^{99}=2\cdot 8^{33}=2\cdot(7+1)^{33}$$

と変形すると，同様に考えれば，2^{100} を 7 で割った余りは，$2\cdot 1^{33}$ を 7 で割った余りに等しい．$2\cdot 1^{33}=2$ であることから，100^{100} を 7 で割った余りは，**2**……(**答**)

解説

100^{100} を実際に 7 で割るわけにはいかないので，二項定理を駆使して解いています．これは，7 の倍数部分は当然 7 で割り切れるので，余った部分を 7 で割るという考え方を用いています．例えば，1000 を 7 で割った余りを考えるとします．

$$1000=7\times 100+300$$

と変形できるので，1000 を 7 で割った余りは 300 を 7 で割った余りに等しくなります．さらに，

$$300=7\times 42+6$$

と変形できるので，300 を 7 で割った余りは 6 を 7 で割った余りに等しくなります．すなわち，求める余りは 6 ということになります．すなわち，

$$1000=7\times 100+300=7\times 100+7\times 42+6=7\times(100+42)+6$$

という変形を行っていることになります．
本問の解答もこれと同じ原理を利用しているのです．

（3）**【証明】**

$9^{2n}+4^{2n}=81^n+16^n$ である．ここで，① より，$a=80,\ b=1$ とすると，

$$(80+1)^n=80({}_n\mathrm{C}_0 80^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_1 80^{n-2}\cdot 1+{}_n\mathrm{C}_2 80^{n-3}\cdot 1^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}1^{n-1})+{}_n\mathrm{C}_n 1^n$$

と表されるので，81^n を 5 で割った余りは，1 である．同様に，① より，$a=15,\ b=1$ とすると，

$$(15+1)^n=15({}_n\mathrm{C}_0 15^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_1 15^{n-2}\cdot 1+{}_n\mathrm{C}_2 15^{n-3}\cdot 1^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}1^{n-1})+{}_n\mathrm{C}_n 1^n$$

と表されるので，16^n を 5 で割った余りは，1 である．
以上より，$9^{2n}+4^{2n}$ を 5 で割った余りは，2 であることが示された．　**(証明終)**……(**答**)

解説

余りに関して次のようなことが成り立ちます．これは，非常に重要なことなので，確実に理解してください．

自然数 $x,\ y,\ a$ がある．x を a で割った余りを $R(x)$，y を a で割った余りを $R(y)$ とする．このとき，次の式が成り立つ．

$$\begin{cases} R(x+y)=R(x)+R(y) \\ R(xy)=R(x)R(y) \end{cases}$$

この式を直訳すると，

$$\begin{cases} \text{和を } a \text{ で割った余りは，} a \text{ で割った余りの和に等しい．} \\ \text{積を } a \text{ で割った余りは，} a \text{ で割った余りの積に等しい．} \end{cases}$$

となります．式を使って説明すると次のようになります．
x を a で割った商を P 余りを $R(x)$，y を a で割った商を Q 余りを $R(y)$ とすると，

$$\begin{cases} x=aP+R(x) \\ y=aQ+R(y) \end{cases}$$

となる．よって，

$$x+y=a(P+Q)+R(x)+R(y)$$

Ⓒ 大学受験・数学塾　管理人：makoto

となることから，$x+y$ を a で割った余りは，$R(x)+R(y)$ となる．また，

$$\begin{aligned} xy=(aP+R(x))(aQ+R(y)) &= a^2PQ+a(PR(y)+QR(x))+R(x)R(y) \\ &= a\{aPQ+(PR(y)+QR(x))\}+R(x)R(y) \end{aligned}$$

となることから，xy を a で割った余りは，$R(x)R(y)$ となります．具体的な数字を用いて説明すると，$x=24,\ y=65,\ a=7$ として考えてみます．まず，和は

$$x+y=24+65=89$$

ですね．89 を 7 で割った余りは，5 となります．24 を 7 で割った余りは 3 で，65 を 7 で割った余りは 2 ですから，89 を 7 で割った余りは $3+2=5$ となり，確かに $R(x+y)=R(x)+R(y)$ が成り立っています．
また，積は

$$xy=24\cdot 65=1560$$

ですね．1560 を 7 で割った余りは，6 となります．24 を 7 で割った余りは 3 で，65 を 7 で割った余りは 2 ですから，1560 を 7 で割った余りは $3\times 2=6$ となりとなり，確かに $R(xy)=R(x)R(y)$ が成り立っています．
このように，和や積の余りを考えるときには，このことは非常に有効に使えるのです．本問はこのことを用いて証明をしています．

Ⓒ 大学受験・数学塾　管理人：makoto

◀類題演習▶

1 解答 ☞ p.12

2008! を素因数分解したとき，素因数 2 はいくつあるか.

2 解答 ☞ p.13

x, y を整数とする．次の方程式をみたす x, y の組をすべて求めよ.

（1） $3xy+2x+y=0$

（2） $x^2-xy-2y^2=16$

3 解答 ☞ p.14

次の各問いに答えよ.

（1） $\dfrac{n^2-7n+30}{n-4}$ の値が自然数となるような整数 n の値をすべて求めよ.

（2） $x^2+y^2+z=31$ をみたす自然数 x, y, z の組は全部で何通りあるか.

（3） x, y は 3 以上の自然数とする．$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y} \geqq \dfrac{1}{2}$, $y \geqq x$ をみたす x, y の組をすべて求めよ.

4 解答 ☞ p.15

n を自然数とする．次の各問いに答えよ.

（1） $n^4+4n^3-n^2-4n$ が 12 の倍数であることを示せ.

（2） a, n を 2 以上の整数とする．a^n-1 が素数ならば n も素数であることを対偶を用いて示せ.

5 解答 ☞ p.16

次の各問いに答えよ.

（1） 7^{100} を 10 で割った余りを求めよ.

（2） 3^{100} を 7 で割った余りを求めよ.

（3） n を自然数とするとき，4^n+6^n を 5 で割った余りを求めよ.

Ⓒ 大学受験・数学塾　管理人：makoto

1 解答 と 解説

素因数 2 の個数を●で表すと,

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	…
	●		●		●		●		●		●		●		●		●		●	
			●				●				●				●				●	
							●								●					
															●					

となることから,●の個数が素因数 2 の個数と一致する.

2 の倍数は,	1004 個	2^2 の倍数は,	502 個
2^3 の倍数は,	251 個	2^4 の倍数は,	125 個
2^5 の倍数は,	62 個	2^6 の倍数は,	31 個
2^7 の倍数は,	15 個	2^8 の倍数は,	7 個
2^9 の倍数は,	3 個	2^{10} の倍数は,	1 個

であるから,求める素因数 2 の個数は,

$$1004+502+251+125+62+31+15+7+3+1=\mathbf{2001}\textbf{(個)}\cdots\cdots\textbf{(答)}$$

♣ ◇ ♠ ♡

解説

やり方が分かってしまえば,いくらでも応用できそうですね!一般の場合に拡張して考えてみるのもいいかもしれません.ちなみに素因数 3, 5 の個数はそれぞれ 1000, 500 となりますので,もし間違えた人は類題演習という意味でこれらも求めてみるとよいでしょう.

ちなみに, 解答 にある式をもっと簡単に表すと,次のようになります.

$$\left[\frac{2008}{2}\right]+\left[\frac{2008}{2^2}\right]+\left[\frac{2008}{2^3}\right]+\cdots\cdots+\left[\frac{2008}{2^{10}}\right]=2001$$

ここで,$[x]$ は x を超えない最大の整数を表します.(ガウス記号とも言う.)このガウス記号は,整数問題では頻繁に登場します.これに関する問題は中級編で扱います.

© 大学受験・数学塾 管理人:makoto

2 解答 と 解説

(1)

$$\begin{aligned} 3xy+2x+y=0 &\iff xy+\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y=0 \\ &\iff \left(x+\frac{1}{3}\right)\left(y+\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{9} \\ &\iff (3x+1)(3y+2)=2 \end{aligned}$$

$3x+1,\ 3y+2$ はともに整数であるから，かけて 2 となる組合せは，次の通りである．

$3x+1$	-2	-1	1	2
$3y+2$	-1	-2	2	1

上段に -1，下段に -2 を加えると，

$3x$	-3	-2	0	1
$3y$	-3	-4	0	-1

上段，下段ともに 3 で割ると，

x	-1	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
y	-1	$-\frac{4}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$

ゆえに，求める整数解は，

$$\boldsymbol{(x,\ y)=(-1,\ -1),\ (0,\ 0)}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

(2) $x^2-xy-2y^2=16 \iff (x-2y)(x+y)=16$

$x-2y,\ x+y$ はともに整数であるから，かけて 16 となる組合せは，次の通りである．

$x-2y$	-16	-8	-4	-2	-1	1	2	4	8	16
$x+y$	-1	-2	-4	-8	-16	16	8	4	2	1

上段に -1 をかけて，下段に加えると，

$x-2y$	-16	-8	-4	-2	-1	1	2	4	8	16
$3y$	15	6	0	-6	-15	15	6	0	-6	-15

下段に $\frac{2}{3}$ をかけて，上段に加えると，

x	-6	-4	-4	-6	-11	11	6	4	4	6
y	5	2	0	-2	-5	5	2	0	-2	-5

ゆえに，求める整数解は，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{(x,\ y)=(-6,\ 5),\ (-4,\ 2),\ (-4,\ 0),\ (-6,\ -2),\ (-11,\ -5)} \\ \boldsymbol{(11,\ 5),\ (6,\ 2),\ (4,\ 0),\ (4,\ -2),\ (6,\ -5)}\end{aligned}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

♣ ◇ ♠ ♡

解説

(1) は $3xy+2x+y=0$ の形ではうまく因数分解することができません．例題にあるような方法で因数分解を行うために両辺をまず 3 で割るのです．そうすれば，例題の方法で因数分解を行うことができます．後は，両辺を 9 倍して，(整数)×(整数)＝(整数) の形に変形してやればよいのです．

Ⓒ 大学受験・数学塾　管理人：makoto

3 解答 と 解説

(1)　$n^2-7n+30=(n-4)(n-3)+18$ と表されるので，

$$\frac{n^2-7n+30}{n-4}=\frac{(n-4)(n-3)+18}{n-4}=n-3+\frac{18}{n-4}$$

よって，$n-4$ が 18 の約数であればよい．

$n-4=1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 9,\ 18$ のときは，$n=5,\ 6,\ 7,\ 10,\ 13,\ 22$ となり，題意をみたす．

$n-4\leqq -1$ のとき，$n\leqq 3$ でこのとき，

$(\text{与式})=n-3+\dfrac{18}{n-4}<0$ となり，題意に反するので不適．

ゆえに，求める n の値は，

$$\boldsymbol{n=5,\ 6,\ 7,\ 10,\ 13,\ 22}\cdots\cdots\textbf{(答)}$$

(2)　$x^2=31-(y^2+z)\leqq 31-2=29$ であるから，x のとり得る値は，$x=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ である．

（i）　$x=1$ のとき，

$y^2+z=30$ より，$(y,\ z)=(1,\ 29),\ (2,\ 26),\ (3,\ 21),\ (4,\ 14),\ (5,\ 5)$ の 5 組

（ii）　$x=2$ のとき，

$y^2+z=27$ より，$(y,\ z)=(1,\ 26),\ (2,\ 23),\ (3,\ 18),\ (4,\ 11),\ (5,\ 2)$ の 5 組

（iii）　$x=3$ のとき，

$y^2+z=22$ より，$(y,\ z)=(1,\ 21),\ (2,\ 18),\ (3,\ 13),\ (4,\ 6)$ の 4 組

（iv）　$x=4$ のとき，

$y^2+z=15$ より，$(y,\ z)=(1,\ 14),\ (2,\ 11),\ (3,\ 6)$ の 3 組

（v）　$x=5$ のとき，

$y^2+z=6$ より，$(y,\ z)=(1,\ 5),\ (2,\ 2)$ の 2 組

ゆえに，求める組数は，

$$5+5+4+3+2=\mathbf{19}\textbf{(通り)}\cdots\cdots\textbf{(答)}$$

(3)　$x\leqq y$ より，$\dfrac{1}{x}\geqq\dfrac{1}{y}$ であるから，

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\geqq\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geqq\frac{1}{2}\iff\frac{2}{x}\geqq\frac{1}{2}\iff x\leqq 4$$

したがって，$x=3,\ 4$ である．

（i）　$x=3$ のとき，

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{y}\geqq\frac{1}{2}\iff y\leqq 6$$

したがって，$y=3,\ 4,\ 5,\ 6$ である．

（ii）　$x=4$ のとき，

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{y}\geqq\frac{1}{2}\iff y\leqq 4$$

したがって，$y=4$ である．

ゆえに，$\boldsymbol{(x,\ y)=(3,\ 3),\ (3,\ 4),\ (3,\ 5),\ (3,\ 6),\ (4,\ 4)}\cdots\cdots\textbf{(答)}$

♣　♢　♠　♡

解説

(1) では $n-4\leqq -1$ のときは，すべて題意をみたさないことを見抜き一気に不適であることを示すほうが効率がよいでしょう．(2) は $x,\ y$ どちらかの値を絞ってあとはしらみつぶしに探していきます．z の値を絞ると $z\leqq 29$ となるため効率的とはいえません．(3) は定石通り値の小さいほうの文字 x で絞り込みます．

Ⓒ 大学受験・数学塾　管理人：makoto

4 解答 と 解説

(1) **【証明】**

$n^4+4n^3-n^2-4n=(n-1)n(n+1)(n+4)$ であるから，与えられた数は隣接する 3 つの整数の積を含んでいるので，3 の倍数である．よって，4 の倍数であることを示せばよい．k を自然数とする．

（ i ） $n=2k$ のとき，

$$(n-1)n(n+1)(n+4)=(2k-1)\cdot 2k\cdot(2k+1)(2k+4)=4(2k-1)k(2k+1)(k+2)$$

となるので，4 の倍数である．

（ii） $n=2k-1$ のとき，

$$(n-1)n(n+1)(n+4)=(2k-2)(2k-1)\cdot 2k\cdot(2k+3)=4(k-1)(2k-1)k(2k+3)$$

となるので，4 の倍数である．

ゆえに，$n^4+4n^3-n^2-4n$ は 3 かつ 4 の倍数であるから，12 の倍数であることが示された．

(証明終)……(**答**)

(2) **【証明】**

「a^n-1 が素数ならば n も素数である」の対偶は，「n が合成数ならば a^n-1 も合成数である」である．n を合成数とし，$n=pq$（$p,\ q$ はともに 1 より大きい整数）とすると，

$$\begin{aligned} a^n-1 &= a^{pq}-1 \\ &= (a^q)^p-1 \\ &= (a^q-1)\{(a^q)^{p-1}+(a^q)^{p-2}+\cdots\cdots+1\} \end{aligned}$$

となる．$q>1$ より，$a^q-1>1$, $(a^q)^{p-1}+(a^q)^{p-2}+\cdots\cdots+1>1$ となるので，a^n-1 は合成数である．

したがって，a^n-1 が素数ならば n も素数であることが示された． **(証明終)**……(**答**)

♣ ◇ ♠ ♡

解説

(1) では因数分解すれば，隣接する 3 つの整数の積が出てくるので，$3!=6$ の倍数であることがわかります．ここで，$(n-1)n(n+1)$ が 6 の倍数だから与えられた式が 12 の倍数になるためには $(n+4)$ が 2 の倍数になればよいと考えるのは誤りです．なぜなら，$(n+4)$ が 2 の倍数にならなくても $(n-1)n(n+1)$ が 12 の倍数になることがあるからです．($(n-1)n(n+1)$ は 6 の倍数なので 12 の倍数になることがある．) したがって，別に 4 の倍数であることを示さなければいけません．(2) は，p.6 の例題を一般化したものなので，まったく同じ解法で解くことができます．

© 大学受験・数学塾　管理人：makoto

5 解答 と 解説

(1)　7^{100} を 10 で割った余りを求めるということは，7^{100} の 1 の位の数を求めることと同値である．ここで，$f(n)$ が整数 n の 1 の位を表すものとすると，

$$f(7)=7,\ f(7^2)=9,\ f(7^3)=3,\ f(7^4)=1,\ f(7^5)=7,\ \cdots$$

となるので，k を自然数とするとき，

$$f(7^{4k-3})=7,\ f(7^{4k-2})=9,\ f(7^{4k-1})=3,\ f(7^{4k})=1$$

である．$100=4\cdot25$ であるから，$f(7^{100})=1$ となる．ゆえに，7^{100} を 10 で割った余りは，**1**……(**答**)

(2)　$3^{100}=9^{50}$ である．ここで，a, b, n を自然数とするとき，

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= {}_n\mathrm{C}_0a^n+{}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b+{}_n\mathrm{C}_2a^{n-2}b^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}ab^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_nb^n\\ &= a({}_n\mathrm{C}_0a^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_1a^{n-2}b+{}_n\mathrm{C}_2a^{n-3}b^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}b^{n-1})+{}_n\mathrm{C}_nb^n\ \cdots\cdots①\end{aligned}$$

であるから，$a=7, b=2, n=50$ とすると，

$$(7+2)^{50}=7({}_{50}\mathrm{C}_07^{49}+{}_{50}\mathrm{C}_17^{48}2+{}_{50}\mathrm{C}_27^{47}2^2+\cdots\cdots+{}_{50}\mathrm{C}_{49}2^{49})+{}_{50}\mathrm{C}_{50}2^{50}$$

であるから，3^{100} を 7 で割った余りは，2^{50} を 7 で割ったあまりと等しい．

$$2^{50}=2^2\cdot2^{48}=4\cdot8^{16}=4\cdot(7+1)^{16}$$

と変形すると，同様に考えれば，2^{50} を 7 で割った余りは，$4\cdot1^{16}$ を 7 で割った余りに等しい．$4\cdot1^{16}=4$ であることから，3^{100} を 7 で割った余りは，**4**……(**答**)

(3)　**【証明】**

① より，$a=5, b=-1$ とすると，

$$4^n=(5-1)^n=5({}_n\mathrm{C}_05^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_15^{n-2}(-1)+{}_n\mathrm{C}_25^{n-3}(-1)^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}(-1)^{n-1})+{}_n\mathrm{C}_n(-1)^n$$

と表されるので，4^n を 5 で割った余りは，$(-1)^n$ である．同様に，① より，$a=5, b=1$ とすると，

$$6^n=(5+1)^n=5({}_n\mathrm{C}_05^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_15^{n-2}\cdot1+{}_n\mathrm{C}_25^{n-3}\cdot1^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}1^{n-1})+{}_n\mathrm{C}_n1^n$$

と表されるので，6^n を 5 で割った余りは，1 である．
よって，4^n+6^n を 5 で割った余りは，$(-1)^n+1$ となるので，n が偶数のとき，余りは 2 であり，n が奇数のとき，余りは 0 である．
以上より，4^n+6^n を 5 で割った余りは，

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}\ \textbf{が偶数のとき，}\ \mathbf{2}\\ \boldsymbol{n}\ \textbf{が奇数のとき，}\ \mathbf{0}\end{cases}\ \cdots\cdots(\textbf{答})$$

♣ ◇ ♠ ♡

解説

(1), (2) は例題と同様の解法で解くことができます．(3) では余りが $(-1)^n+1$ となるので，n を偶数のときと奇数のときとに場合分けして答えておきましょう．
中級編では，合同式を用いてもっと楽に解いてみます．

© 大学受験・数学塾　管理人：makoto