問題 ('79　弘前大)　　**【難易度】** … 標準

曲線 $C: y=\sqrt{5-x}$ 上の点を $\mathrm{P}(a, b)$ とする．ただし，$0 \leqq a < 5$ とする．

(1)　点 P における曲線 C の接線の方程式を求めよ．

(2)　(1) で得られた接線，曲線 C，x 軸および y 軸で囲まれた部分を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を V とする．このとき，V を a の関数で表せ．

(3)　(2) で得られた体積 V の最小値を求めよ．

【テーマ】：微分法の応用

方針

(2) は，円錐の体積から曲線をまわして得られる体積を引きます．

解答

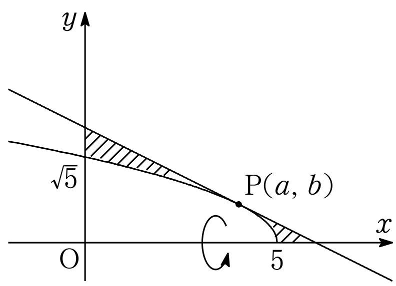
(1)　$y' = \dfrac{-1}{2\sqrt{5-x}}$ より，$\mathrm{P}(a, b)$ における接線の方程式は，

$$
\begin{aligned}
y &= -\frac{1}{2\sqrt{5-a}}(x-a)+b \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{5-a}}x + \frac{a}{2\sqrt{5-a}} + \sqrt{5-a} \\
&= \boldsymbol{-\frac{1}{2\sqrt{5-a}}x + \frac{10-a}{2\sqrt{5-a}}} \cdots\cdots(\textbf{答}) \cdots\cdots ①
\end{aligned}
$$

である．

(2)　① と x 軸の交点は，$(10-a, 0)$ であり，① と y 軸の交点は，$\left(0, \dfrac{10-a}{2\sqrt{5-a}}\right)$ である．よって，

$$
\begin{aligned}
V &= \pi\left(\frac{10-a}{2\sqrt{5-a}}\right)^2 \times (10-a) \times \frac{1}{3} - \int_0^5 \pi y^2\,dx \\
&= \frac{(10-a)^3}{12(5-a)}\pi - \pi\int_0^5 (5-x)\,dx \\
&= \frac{(10-a)^3}{12(5-a)}\pi - \pi\left[5x - \frac{1}{2}x^2\right]_0^5 \\
&= \left\{\frac{(10-a)^3}{12(5-a)} - \left(25 - \frac{25}{2}\right)\right\}\pi \\
&= \boldsymbol{\left\{\frac{(10-a)^3}{12(5-a)} - \frac{25}{2}\right\}\pi} \cdots\cdots(\textbf{答})
\end{aligned}
$$



(3)　(2) の V を a の関数と考えて $V=V(a)$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
V'(a) &= \frac{\pi}{12}\cdot\frac{3(10-a)^2\cdot(-1)\cdot(5-a)-(10-a)^3\cdot(-1)}{(5-a)^2} \\
&= \frac{\pi}{12}\cdot\frac{(10-a)^2(2a-5)}{(5-a)^2}
\end{aligned}
$$

$V'(a)=0$ のとき，$a=\dfrac{5}{2}$ ($\because$ $0 \leqq a < 5$) より，増減表は次のようになる．

a	0	$\cdots$	$\frac{5}{2}$	$\cdots$	(5)
$V'(a)$		$-$	0	$+$	
$V(a)$		$\searrow$		$\nearrow$	

ゆえに，$a=\dfrac{5}{2}$ のとき，V は最小値

$$\begin{aligned}V\left(\frac{5}{2}\right)&=\left\{\frac{\left(10-\frac{5}{2}\right)^3}{12\cdot\frac{5}{2}}-\frac{25}{2}\right\}\pi\\&=\left(\frac{15^3}{6\cdot5\cdot8}-\frac{25}{2}\right)\pi\\&=\left(\frac{3^2\cdot5^2}{2^4}-\frac{5^2}{2}\right)\pi\\&=\frac{5^2(3^2-2^3)}{2^4}\pi\\&=\boldsymbol{\frac{25}{16}\pi}\cdots\cdots(\textbf{答})\end{aligned}$$

をとる．

◇ ♡

解説

(1) は，接線の公式を利用するだけですが，点 P が曲線 C 上にあるので，$b=\sqrt{5-a}$ を用いて b を消去しておきます．理由は，(2), (3) の設問を見たとき，体積 V を a の関数として考えているためです．

(2) は，直線と曲線 C で囲まれた部分を x 軸のまわりに回転させたときの回転体の体積を求めますが，直線を回転させると円錐ができるので，円錐は公式を用いて計算すれば積分計算をする必要はありません．そこから，不要な部分を除けばよいのです．

(3) は，(2) で求めた体積 V を a の関数とみて積分します．微分の計算を慎重にやれば基本的な計算問題なので完答できるでしょう．